Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

Mi

Kommerell=Hauck.

Lehrbuch der Stereometrie.

Lehrbuch
der
Stereometrie.

Auf Grund von

Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch

neu bearbeitet und erweitert

von

Dr. Guido Hauck,
Geh. Regierungsrat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin
(früher Professor an der Königl. Oberrealschule zu Tübingen).

Siebente Auflage.
(Sechste der Neubearbeitung.)

Mit 67 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Tübingen, 1893.
Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung.

Druck von H. Laupp jr. in Tübingen.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die Stereometrie ist in der Schule nach zweierlei Gesichtspunkten zu behandeln, als Wissenschaft für sich und als vorbereitende Wissenschaft. In ersterer Beziehung habe ich einerseits alle Beweise in streng mathematischer Form zu geben gesucht, andererseits aber dabei doch auch die Stufe der Schüler berücksichtigt, auf welcher sie größtenteils beim Beginn dieses Schulfaches stehen. Von den mir bekannten Lehrbüchern der Stereometrie weicht meine Darstellung namentlich darin ab, daß die Einleitungen zu den einzelnen Büchern größer und inhaltreicher als gewöhnlich sind, daß in dieselben vieles aufgenommen ist, was sonst in Form von Lehrsätzen gegeben wird. Es gibt gerade in der Stereometrie so viele derartige Sätze, die zwar einer Begründung bedürfen, und doch so kurz abgemacht werden können, daß ich sie wohl in die Einleitungen aufnehmen zu können glaubte. Es wird dadurch Zeit und Raum erspart und das Ganze gewinnt für den Anfänger an Übersichtlichkeit. Sonst habe ich in Betreff der Auswahl des Stoffs nur noch zu bemerken, daß ich auf die neue Geometrie absichtlich keine Rücksicht genommen habe, aus demselben Grunde, aus dem ich dies in meinem Lehrbuch der ebenen Geometrie unterlassen habe; ferner, daß ich das Prismatoïd nach dem Vorgange Wittsteins als einen wirklichen Gewinn für diese Wissenschaft ansehe und darum dasselbe dem System der Lehrsätze einverleibt habe, endlich, daß ich einige Beweise des ersten und zweiten Buches, welche Manchem neu erscheinen werden, von Herrn Escher entlehnt habe. Von mir stammt namentlich eine neue Formel für den Inhalt der Kugelzone. Sie ist auch für solche Zonen giltig, welche den Mittelpunkt enthalten. Wenn sodann die Stereometrie den Zweck eines Schulfachs im wahren Sinne erfüllen soll, so muß sie Denkübung sein. Und insofern genügte es mir nicht, dem Schüler bloß Begriffe und fertige Sätze zu geben, sondern ich fügte jedem Buche auch Uebungs-Aufgaben bei und zwar keine Rechnungs-Aufgaben, sondern rein geometrische Aufgaben, und gab nur bei den schwereren derselben eine kurze Anleitung zur Lösung.

Als vorbereitende Wissenschaft für die Praxis ist die Stereometrie von jeher betrachtet worden und die Berechnungen, welche mit Hilfe der Formeln über Inhalt und Oberfläche der Körper angestellt werden, geben Veranlassung, den Schüler zugleich mit den Reduktionen der verschiedenen Maße und Gewichte, mit den Anwendungen der Lehre vom spezifischen Gewicht und Ähnlichem bekannt zu machen. Ich betrachte aber den Unterricht in der Stereometrie zugleich als Vorbereitung für die beschreibende Geometrie und zu diesem Zweck habe ich für's erste viele Aufgaben aufgenommen, welche hauptsächlich die stereometrische Phantasie üben sollen, womit zweitens zusammenhängt, daß ich dem Buche verhältnismäßig wenige Figuren beigegeben habe, und daß ich diese Figuren nicht, wie es jetzt Mode geworden ist, in den Text eindrucken ließ. Dadurch, daß sie vom Texte getrennt sind, ist es dem Lehrer möglich, einen Satz nicht bloß mit Text und Figur, sondern auch mit Text ohne Figur und mit Figur ohne Text zu besprechen.

In der Terminologie habe ich mir erlaubt, das Wort „Parallelepipedon" zu verbannen und dafür analog mit andern bereits eingebürgerten Wörtern das „Parallelflach", sowie anstatt des „rechtwinkligen Parallelepipedons" den „Quader" einzuführen. — Die Abbreviaturen und Zeichen sind dieselben, wie in meinem Lehrbuch der ebenen Geometrie und wie sie auch sonst gebräuchlich sind.

Im Uebrigen mag das Buch für sich selbst reden und von Lehrern und Schülern gerne gebraucht werden.

Tübingen, Oktober 1864.

Dr. Ferdinand Kommerell.

Aus den Vorreden zur zweiten bis sechsten Auflage.

Am 24. Febr. 1872 wurde die irdische Hülle des Dr. Ferd. Kommerell, Professors und Vorstands der Realschule zu Tübingen, zur Ruhe bestattet. Was der Verstorbene als Mensch, als Freund, als Lehrer war, davon giebt die Anhänglichkeit Kunde, mit der seine zahlreichen Freunde und Schüler heute noch sein Andenken ehren. Um auch der wissenschaftlichen und pädagogischen Bedeutung des Mannes ein Gedenkzeichen zu stiften, habe ich es gerne übernommen, dessen Lehrbuch der Stereometrie neu zu bearbeiten. Indessen schienen mir die Veränderungen, die in der Organisation unserer höheren Lehranstalten seit dem ersten Erscheinen des Buches vor sich gegangen sind, und die dadurch bedingten höheren Ansprüche, die heute an den Stereometrie-Unterricht gestellt werden, umfassende Änderungen notwendig zu machen. Ich gieng dabei von dem Grundsatz aus, das Lehrziel des Buches jenen ausgedehnteren Bedürfnissen entsprechend zu erweitern, ohne dadurch seine Brauchbarkeit für bescheidenere Ansprüche zu beeinträchtigen. Auch glaubte ich, die etwas schroff Euklidische Form modifizieren und der genetisch-heuristischen Methode Zugeständnisse machen zu sollen. — Als weitere eigene Zugabe mache ich den jedem einzelnen Buche angehängten Übungsstoff geltend, durch welchen ich einem entschiedenen Bedürfnis entgegengekommen zu sein glaube. Die Anhänge in der ersten Auflage konnten dieses Bedürfnis nicht befriedigen. — Die Änderungen und Neuerungen im einzelnen aufzuzählen, ist unmöglich; ich beschränke mich darauf, einige wesentliche Punkte zu berühren, namentlich solche, die einer näheren Begründung bedürfen:

Buch I hat in seiner Disposition eine vollständige Umänderung erfahren. Die Erwägung, daß das Operieren mit Begriffen, die noch nicht vollkommen klargelegt sind, und namentlich das Verwenden einer Definition, die einen noch unbewiesenen Lehrsatz in sich schließt (wie dies z. B. mit I. Einl. 7. a der Fall war), sowohl logisch als pädagogisch unzulässig ist, bestimmte mich zu einer vollständigen Umstellung der Lehrsätze und Änderung des Beweisverfahrens. Es ergab sich dabei ganz von selbst der Vorteil, daß sich nunmehr die Sätze in drei natürliche Gruppen scheiden. — Auch die Aufgaben wurden einer Neubearbeitung unterzogen, für welche die „Vorbemerkung" (S. 26) und deren konsequente Durchführung bestimmend war. — Ferner sei erwähnt: die Neueinführung bezw. Weiterausführung der Begriffe „Projektion", „Keil", „Symmetrie". — Die Auffassung zweier parallelen Elemente als sich im Unendlichen schneidend ist aufgenommen, ohne daß jedoch unendl. ferne Elemente zur Beweisführung verwertet wären. Es geschah dies, um den Schüler möglichst frühe an diese Anschauung zu gewöhnen, welche u. a. zur richtigen Erfassung der Zusammengehörigkeit von Cylinder und Kegel unerläßlich ist.

In **Buch II** besteht die hauptsächlichste Neuerung darin, daß Cylinder, Kegel und Kugel als Flächen eingeführt wurden, deren Verwertung als geometrische Örter das wichtigste Hilfsmittel zur Lösung konstruktiver Aufgaben bildet. Diese Neuerung brachte eine Vergrößerung der schon vorher ausgedehnten Einleitung mit sich. Daher wurde die ganze Einleitung neu bearbeitet, und dabei namentlich eine übersichtlichere Anordnung des Stoffes erstrebt. — Die zum Teil auch mit Rücksicht auf Guldins Regel (Buch III) vorangeschickte allgemeine Betrachtung der Rotationsflächen soll den notwendigen Zusammenhang zwischen den drei speziellen Flächen herstellen und bedingt bedeutende Vereinfachungen in der Herleitung ihrer Eigenschaften. Diese sind jetzt ganz in Buch II abgehandelt; nur die „Abwicklung" verblieb in Buch III. Die Berührungsebenen erfuhren besondere Berücksichtigung; Berührungskegel und Berührungscylinder wurden neu eingeführt.*) Zweck und Wesen der Sphärik wurde schärfer gekennzeichnet. Das Dreikant wurde als selbständiges Gebilde vorgeführt. Der Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie erfuhr eine ausführlichere Darlegung. — Hiemit in Zusammenhang stehen die Änderungen, die bei den Lehrsätzen als notwendig erachtet wurden. — Die Aufgaben haben eine vollständige

---

*) Den schiefen Kreiscylinder und Kreiskegel aufzunehmen, konnte ich mich nicht entschließen. Sie scheinen mir entschieden außerhalb des Rahmens der elementaren Stereometrie zu fallen, in der die Rotationsflächen das Analogon zum Kreis in der Planimetrie bilden. Auch sind sie als Flächen für stereometrische Konstruktionen bedeutungslos, als Körper kommen sie in Technik, Kunst und Natur nirgends vor. Dem gegenüber kann der bloße Umstand, daß ihr Rauminhalt sich mit elementaren Mitteln berechnen läßt (was mit zwei Worten als Zusatz zu III. 9 und 13 abgemacht ist) nicht maßgebend sein.

Neugestaltung erfahren. Sie bilden jetzt die natürliche Fortsetzung der Fundamentalaufgaben in Buch I und finden bei Konstruktionen mittels geometrischer Örter ihre häufige Anwendung. — Die Zirkelkonstruktionen der Sphärik mit dem zugehörigen Übungsmaterial im Anhang werden dazu beitragen, den Charakter der Sphärik ins richtige Licht zu setzen, und werden nicht verfehlen, auf den Schüler ihren Reiz auszuüben.

Auch in **Buch III** wurde die Einleitung einer Umarbeitung und Erweiterung unterzogen. Die Lücken, die bezüglich der allgemeinen Polyeder-Eigenschaften und der näheren Beschreibung der regulären Polyeder früher vorhanden waren, sind ausgefüllt. Bei letzterer leistete der neue Begriff „reguläres Prismatoid“ oder „Trommel“ wesentliche Dienste. — Die Lehrsätze und Aufgaben erfuhren vielfache Änderungen, namentlich im Sinne größerer Strenge, Allgemeinheit und Eleganz des Beweisverfahrens. — Guldins Regel ist neu zugefügt.

Die **Figuren** haben eine Neugestaltung und Vermehrung erfahren und sind nunmehr in den Text eingedruckt. — Wenn man auch nicht wohl gut daran thun dürfte, beim Skizzieren von Zeichnungen stereometrischer Gebilde pedantisch auf strenge Richtigkeit zu dringen, insoferne dadurch die Leichtigkeit und Ungeniertheit des räumlichen Konstruierens leicht beeinträchtigt wird, und wenn sich auch in gewissen Fällen bloße schematische Figuren nicht umgehen lassen, so scheinen mir doch unrichtige und unmögliche Gefühlsfiguren mit der Würde eines Lehrbuchs schlechterdings unvereinbar zu sein. Es wird auch gewiß dem Schüler das selbständige Entwerfen von Figuren wesentlich erleichtert, wenn sein Auge durch das Lehrbuch an richtige, nach bestimmtem System konsequent durchgeführte Figuren gewöhnt ist. Mit Rücksicht hierauf sind die neuen Figuren sämtlich auf Grund genauer Konstruktionen gezeichnet. Zur Darstellung wurde fast durchweg die allgemeine kavalière Parallelperspektive gewählt, da dies diejenige Projektionsart ist, die sich der Schüler auch ohne Kenntnis der deskriptiven Geometrie am leichtesten zu eigen machen kann. Dabei wurde Winkel $(x, y) = 60^0$ und das Verkürzungsverhältnis der $y = \frac{1}{3}$ (bei Fig. 45 $= \frac{1}{4}$) gewählt; die Gründe, die gerade auf dieses System führten, hier auseinanderzusetzen, würde zu weit führen, sie werden sich übrigens bei vergleichender Betrachtung der einzelnen Figuren von selbst aufdrängen*). Nur bei der Sphärik wurde mit Rücksicht auf

*) Die Annahme von W. $(x, y) = 60^0$ giebt eine vollere Entwicklung der horizontalen Flächen und bedingt, da der entsprechende Sehstrahl eine Richtung mehr von oben als von der Seite hat, natür-

den kreisförmigen Umriß der Kugel meist Orthogonalprojektion verwendet. Übrigens dürften gerade hier in gewissen Fällen schematische Figuren (wie z. B. Fig. 25) zu empfehlen sein.

Von der Überzeugung ausgehend, daß das selbständige Entwerfen solcher stereometrischen Figuren seitens des Schülers eines der besten Bildungsmittel für die stereometrische Phantasie ist, halte ich es für überaus wichtig, demselben die nötige Anleitung hiezu zu geben. Ich habe daher (Seite 1) eine kurze Andeutung in dieser Richtung vorangeschickt, welche von dem Lehrer weiter ausgeführt werden mag. — Etwas muß dem Schüler zur Unterstützung seines noch ungelenken Raumanschauungsvermögens an die Hand gegeben werden. Eine rationelle Darstellungsmethode scheint mir aber in dieser Beziehung weit wichtiger zu sein als Modelle. Ersteres Mittel wird ihm erfahrungsgemäß bei nur einiger Übung leicht handgerecht; es ist dann sein unveräußerliches Eigentum, das er zu jeder Zeit und zu jedem Zweck verwerten kann, dessen Besitz ihm ein freudiges Selbstvertrauen einflößt und ihn zum selbständigen Anfassen von Aufgaben ermutigt; auch außerhalb des engeren Gebietes der Stereometrie findet er dafür die mannigfachste Gelegenheit zur Verwertung. — Modelle dagegen, wenn man sie auch, namentlich zu Anfang des Unterrichts, nicht wird entbehren mögen, erleichtern dem Schüler nur das Verständnis des vom Lehrer Vorgetragenen, bieten ihm aber zum eigenen Schaffen keine Hilfe; sie sind fremdes Eigentum, die Abhängigkeit davon beeinträchtigt die Selbständigkeit seines Denkens.

Was die **Anhänge** anlangt, so leitete mich bei der Auswahl der Übungs-Lehrsätze der Grundsatz, keine gleichgültigen Sätze, die nur durch das Aufsuchen des Beweises Interesse gewinnen, sondern nur solche Lehrsätze aufzunehmen, die an und für sich wichtig und interessant sind, die also noch zum „System im weiteren Sinne" gehören. Diejenigen Sätze, die zur Lösung von späteren Aufgaben unerläßlich sind, und die auch außerhalb der eigentlichen Anhänge noch Verwertung finden, sind durch ein Kreuz (†) ausgezeichnet. — Die Aufgaben sind meist konstruktiver Natur; sie wurden mit Rücksicht auf den Zweck ausgewählt, dem Schüler eine möglichst große und vielseitige Gewandtheit, Sicherheit und Kühnheit im räumlichen Konstruieren zu verleihen. — Übrigens bildet die Aufgabensammlung nicht eine bloße Aufspeicherung von Übungsmaterial, sie soll vielmehr durch die planmäßige Aufeinanderfolge der Sätze und Auf-

lichere Bilder, als die vielfach übliche Annahme von 30°. (Es kommt dies namentlich bei abstrakten Raumgebilden zur Geltung.)

gaben, sowie durch deren Zusammenstellung in einzelne Gruppen und die vielfach beigefügten Andeutungen der Lösung zugleich die Aufgabe einer **systematischen Anleitung zur konstruktiven Lösung stereometrischer Aufgaben** erfüllen. — Bezüglich der Konstruktionsaufgaben im Anhang des III. Buches könnte man darüber streiten, was noch ins Gebiet der Stereometrie und was ins Gebiet der deskriptiven Geometrie gehört. Ich bin von dem Grundsatz ausgegangen, daß das Wesen der deskriptiven Geometrie in den zwei Projektionsebenen besteht, und habe daher die Konstruktionen von Polyeder-Elementen in wahrer Größe, die nur eine Projektionsebene erfordern, aufgenommen. Einen Vorgang hiefür bilden die Dreikant-Konstruktionen in Buch II. — Ausdrücklich sei bemerkt, daß **der gesamte konstruktive Übungsstoff sich ebenso gut auch für die deskriptive Geometrie verwerten läßt.** — Ein bedeutender Teil desselben ist Eigentum des Herausgebers. Das übrige wurde im Lauf der Jahre gesammelt, ohne daß ich heute im Stande wäre, die Quellen im einzelnen nachzuweisen. — Bei den aus der Praxis entnommenen Berechnungsaufgaben wurden die Maßzahlen nach Größe und Genauigkeitsgrad der technischen Natur der jeweiligen Aufgabe angepaßt. Hiebei ergab sich, daß die Benützung von 5-stelligen Logarithmen das einzig Vernünftige für diese Aufgaben ist.

Durch die neuen Zuthaten ist das Buch nunmehr fast auf das Doppelte der ursprünglichen Seitenzahl angewachsen. Trotzdem dürfte dadurch seine Brauchbarkeit für kleinere Lehranstalten nicht beeinträchtigt worden sein. Es ist zur **Benützung in der Schule mit Auswahl** gedacht. Dies gilt nicht bloß für die Anhänge, aus welchen jeder Lehrer das herausgreifen wird, was ihm mit Rücksicht auf seine individuelle Unterrichtsmethode am zweckdienlichsten erscheint, — sondern auch für das eigentliche Lehrsystem. Beispielsweise dürfte die Einleitung zu Buch II zum Verständnis der math. Geographie ausreichen, und könnte bei knapp bemessener Zeit an sie unmittelbar die Einleitung von Buch III gereiht werden, von welchem Lehrs. 1—5 übergangen werden könnten.

Tübingen, im Oktober 1872.
" im Oktober 1876.
Berlin, im Juni 1878.
" im September 1882.
" im Oktober 1887.

Dr. Guido Hauck.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Den Grundsätzen, von denen ich mich bei der Bearbeitung der früheren Auflagen hatte leiten lassen, und von denen die vorangehenden Auszüge Rechenschaft geben, bin ich auch bei der vorliegenden siebenten Auflage treu geblieben.

Von sachlichen Änderungen seien die folgenden namhaft gemacht:

Zum Zweck der Vereinfachung des eigentlichen Lehrsystems wurden die Sätze I. 10. Zus. 1 und 13. Zus. 4 der 6. Aufl. nach I. Anh. 5. c und 19. c verlegt, desgleichen II. Einl. 6. e und 9. d der 6. Aufl. nach II. Anh. 6 und 17. b. Die vier Sätze in II. 3 wurden in zwei zusammengezogen; II. 3. Zus. 3 wurde gestrichen.

Inhaltliche Änderungen wurden vollzogen in: I. Aufg. 6 und 7, II. 16. Zus. 2, II. Aufg. Vorbem., III. 8. a u. c, Bew. — Neu zugefügt wurde I. Aufg. 8 (als Beispiel für die konstruktive Verwendung von geom. Örtern); die früheren Aufg. 8 und 9 haben jetzt die Nummern 9 und 10. In III. Einl. 15 wurden die Abschnitte b und c vertauscht.

Statt „Kugelzweieck“ wurde die Bezeichnung „Sphärisches Zweieck“ eingeführt; statt der Schreibweise „Oktaëder“, „Prismatoïd“, u. s. w. — die Schreibweise „Oktaeder“, „Prismatoid“, u. s. w. — In den Figuren 2, 12, 14, 15, 18, 19, 40, 58 wurden Buchstabenänderungen vorgenommen. Die aus der darstellenden Ge om. entlehnte Bezeichnung von Punktprojektionen durch kleine lat. Buchstaben wurde aufgegeben, da sie beim mündlichen Unterricht leicht störend wirkt und auch mit der sonst befolgten Regel, Punkte mit großen, Linien und Strecken mit kleinen Buchstaben zu bezeichnen, in Widerspruch tritt.

Endlich haben in den Anhängen bei folgenden Nummern Änderungen stattgefunden: I. Anh. 12, 15. b u. c, 27. b; I. Anh. Aufg. 12. b u. c, 18. b, 22. a u. b; II. Anh. 28. b; III. Anh. 9. b, 18. b, 32. c, 36, 39. a, 44. d; III. Anh. Ver.-Aufg. 18, 26, 60, 61, 65, 67, 69, 75, 76, 87. Änderungen in der Numerierung sind erfolgt bei I. Anh. 27 bis 31, II. Anh. 7 bis 12. b, III. Anh. 21. Anm., 37. a u. b.

In stilistischer Beziehung hat der Text mancherlei Änderungen erfahren zum Zweck der Erhöhung der Schärfe und Leichtverständlichkeit, aber auch der Gefälligkeit des Ausdrucks. Der vielverlästerte „papierne Stil" wird von dem Mathematiker immer in Ehren gehalten werden; der mathematische Stil muß bis zu einem gewissen Grad „papieren" sein, wenn er präzis sein soll. Er kann aber dabei sehr wohl zugleich gefällig sein.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor J. Lange in Berlin für die mir von ihm gewordenen wertvollen Ratschläge meinen verbindlichsten Dank zu sagen. Ich füge hieran die freundliche Bitte an alle werten Kollegen, die sich des Buches bei ihrem Unterricht bedienen, mich auch künftig durch Mitteilungen unterstützen zu wollen. Nur dadurch, daß der Autor in beständiger naher Fühlung mit der praktischen Schule bleibt, wird das Buch seiner Aufgabe auf die Dauer genügen können.

Berlin, im April 1893.

Dr. Guido Hauck.

Inhalt.

Drittes Buch.

Polyeder und Umdrehungskörper.

Vorbemerkung.

Die Stereometrie ist derjenige Teil der Geometrie, welcher die Eigenschaften und Gesetze räumlicher Gebilde, d. h. solcher Gebilde, deren einzelne Teile nicht alle in einer Ebene liegen, zum Gegenstand hat. Die Konstruktionen der Stereometrie können daher nicht (wie in der Planimetrie) ohne weiteres in einer Zeichnungsebene mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Man muß sie zunächst mit der inneren Einbildungskraft vollziehen, der man jedoch durch Zeichnungen unterstützend zu Hilfe kommen kann.

Diese Zeichnungen bestehen im allgemeinen in Abbildungen der räumlichen Gebilde, wie sie sich, aus unendlich großer Entfernung betrachtet, ausnehmen würden. Der Unterschied einer solchen Abbildung von einer Abbildung im gewöhnlichen Sinne des Wortes besteht darin, daß bei ihr nicht wie bei der letzteren eine Verjüngung nach hinten stattfindet, sondern daß sich gerade Linien, die in Natura parallel sind, auch wieder als parallele Linien abbilden, und daß die Abbildungen paralleler Strecken oder verschiedener Strecken einer und derselben Geraden den Strecken selbst proportioniert sind.

Gebilde, bei denen die drei Dimensionen des Raumes: Breite (von links nach rechts), Tiefe (von vorne nach hinten) und Höhe (von unten nach oben) deutlich zum Ausdruck kommen, werden am zweckmäßigsten in Frontansicht gezeichnet, d. i. in einer Ansicht, bei der die Breiten- und Höhendimensionen sich in wahrer Richtung und Größe abbilden, die Tiefendimensionen mit einer schiefen Richtungslinie parallel und in einem konstanten Verhältnis verkürzt erscheinen; eine ebene Fläche, die parallel der Breiten- und Höhenrichtung ist, bildet sich in wahrer Gestalt ab. (Vgl. hiezu Fig. 1: Abbildung eines Quaders, dessen Breitenkante 6, Tiefen-

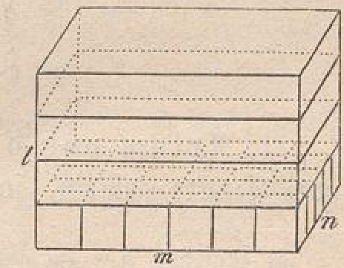


Fig. 1.

kante 5, Höhenkante 4 Längeneinheiten mißt). Diese Art der Darstellung (welche als allgemeine Kavalierperspektive bezeichnet wird) ist bei den meisten Abbildungen im folgenden benützt*).

Damit eine Ebene überhaupt dargestellt werden kann, denkt man sich aus ihr ein rechteckiges Stück ausgeschnitten und bildet dieses ab. Das hindert jedoch nicht, sich in der inneren Anschauung die Ebene unendlich ausgedehnt vorzustellen, wie sie in der That gedacht werden muß. — Diejenigen zwei Randlinien des Rechtecks, an denen die Dicke der Ebene sichtbar sein würde, wenn sie (etwa als Brett gedacht) eine endliche Dicke haben würde, werden, um eine plastische Wirkung zu erzielen, mit etwas stärkeren Strichen markiert (vgl. Fig. 2, S. 6).

Ist eine Linie durch einen vor ihr befindlichen Teil des räumlichen Gebildes verdeckt, so wird sie in der Abbildung meist punktiert gezeichnet, indem man sich den verdeckenden Teil des Gebildes halb-durchsichtig denkt (vgl. Fig. 1).

Erstes Buch.

Gerade und Ebenen im Raume.

A. Einleitung.

1—6: Lage-Beziehungen.

1. Axiom von der Geraden. Haben zwei Gerade zwei Punkte gemein, so haben sie sämtliche Punkte gemein.

---

*) Bei Fig. 1, wie überhaupt bei den meisten folgenden Figuren, ist das Verkürzungsverhältnis der Tiefendimensionen = $^1/_3$, ihr Winkel mit der Breitenrichtung = 60° gewählt. — Dem Lernenden ist sehr zu empfehlen, in der Herstellung von Abbildungen nach dieser Methode sich möglichst rasch eine gewisse Fertigkeit zu erwerben durch Zeichnung einfacher Gegenstände (wie Haus, Tisch, Stuhl, Grabkreuz, Turm mit Zinnen, Treppe mit Wangen u. s. w.).

— Durch zwei Punkte läßt sich immer eine Gerade legen und nur eine, oder: eine Gerade ist bestimmt durch zwei Punkte.

2. Axiom von der Ebene. Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein, so liegt sie mit allen ihren Punkten in der Ebene. — Durch zwei Punkte lassen sich unendlich viele Ebenen legen; jede enthält auch die Verbindungsgerade der zwei Punkte.

3. a. Haben zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, gemein, so haben sie sämtliche Punkte gemein. (Denn sie haben, nach 2, zunächst die drei Verbindungslinien der drei Punkte gemein. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt X der ersten Ebene in dieser eine Gerade, welche zwei von jenen Verbindungslinien schneidet, so gehören die zwei Schnittpunkte auch der zweiten Ebene an. Die Gerade hat also mit der zweiten Ebene zwei Punkte — und folglich auch jeden anderen Punkt, z. B. Punkt X, gemein.) — Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich immer eine Ebene legen und nur eine, oder: eine Ebene ist bestimmt durch drei Punkte. Sie enthält auch die drei Verbindungsgeraden der drei Punkte.

b. Zwei Ebenen können immer zur Deckung gebracht werden. Denn (nach a) genügt hiezu, daß man die eine Ebene beliebig durch drei beliebige Punkte der andern legt. Da dies auf unendlich verschiedene Weise geschehen kann, so folgt weiter: Eine Ebene kann beliebig in sich selbst verschoben werden.

c. Aus a folgt ferner: Eine Ebene ist auch bestimmt durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt, desgleichen durch zwei sich schneidende Gerade oder durch einen Winkel. Eine Ebene kann erzeugt gedacht werden durch eine Gerade, die sich um einen festen Punkt dreht und gleichzeitig an einer festen Geraden hingleitet.

---

4. a. Zwei Gerade liegen entweder in der nämlichen Ebene oder nicht. — Im ersten Fall schneiden sie sich oder sind sie parallel. Doch können auch zwei

parallele Gerade aufgefaßt werden als Gerade, die sich schneiden, deren Schnittpunkt aber in unendliche Entfernung gerückt ist. — Im zweiten Fall schneiden sich die Geraden nicht und heißen windschief.

b. Da die durch einen Punkt mit einer Geraden gezogene Parallele (nach a) in der durch den Punkt und die Gerade bestimmten Ebene liegen muß, so ist auch im Raum durch einen Punkt mit einer Geraden nur eine Parallele möglich.

c. Ferner folgt: Eine Ebene ist bestimmt durch zwei parallele Gerade. Eine Ebene kann erzeugt gedacht werden durch eine Gerade, die an einer festen Geraden hingleitet und sich dabei beständig parallel bleibt.

d. Unter dem Winkel zweier windschiefen Geraden versteht man den Winkel, den zwei durch einen beliebigen Punkt zu den Windschiefen gezogene Parallelen einschließen. (Daß die Größe dieses Winkels eine vollkommen bestimmte, von der Wahl des Scheitelpunktes unabhängige ist, wird in B. 4. Zus. bewiesen werden.)

5. Eine Gerade und eine Ebene müssen entweder sich schneiden, oder zu einander parallel sein, oder muß die Gerade in der Ebene liegen. — Im ersten Fall haben sie nur einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt oder Spurpunkt heißt; (denn hätten sie zwei Punkte gemein, so müßte die Gerade, nach 2, mit allen ihren Punkten in die Ebene fallen.) — Im zweiten Fall ist dieser Schnittpunkt in unendliche Entfernung gerückt; die Gerade und die Ebene haben keinen Punkt im Endlichen gemein.

6. a. Zwei Ebenen müssen entweder sich schneiden oder parallel sein. — Im ersten Fall haben sie eine Gerade gemein, welche ihre Schnittlinie oder Spurlinie heißt; (denn hätten sie drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein, so müßten sie, nach 3. a, zusammenfallen.) — Im zweiten Fall ist diese Schnittlinie in unendliche Entfernung gerückt; die zwei Ebenen haben keinen Punkt in endlicher Entfernung gemein.

Anm. zu 4. a, 5 und 6. a. Insoferne man unendlich entfernte Punkte als uneigentliche Punkte betrachten kann, sagt man auch kurz: eine Gerade oder Ebene wird von einer ihr parallelen Geraden oder Ebene nicht geschnitten.

b. Schneiden sich zwei Ebenen, und liegt in einer von ihnen eine Gerade, so liegt deren Schnittpunkt mit der andern Ebene in der Schnittlinie beider Ebenen.

c. Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede Gerade, die in der einen Ebene liegt, zu der andern parallel. (Denn sie kann mit dieser keinen Punkt gemein haben.)

d. Drei Ebenen haben im allgemeinen einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt heißt. Durch ihn gehen die drei Geraden, nach denen sie sich je zu zweien schneiden.

7—9: Maß-Beziehungen.

7. a. Man sagt, eine Gerade stehe auf einer Ebene senkrecht, wenn sie senkrecht steht auf allen Geraden, die in der Ebene durch ihren Spurpunkt gezogen werden können. (Daß eine solche Stellung einer Geraden zu einer Ebene möglich ist, wird in B. 6. a bewiesen werden.) Der Spurpunkt der Senkrechten in der Ebene heißt ihr Fußpunkt. Man sagt auch, die Ebene sei auf der Geraden senkrecht.

b. Fällt man von einem Punkt außerhalb einer Ebene die Senkrechte auf die Ebene*), so bezeichnet man deren Fußpunkt auch als die Projektion des Punktes auf die Ebene. Die Ebene heißt dann die Projektionsebene, die Senkrechte heißt das projizierende Lot.

c. Unter der Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man die Entfernung des Punktes von seiner Projektion auf die Ebene.

---

*) Daß nur eine Senkrechte möglich ist, wird in B. 7. a bewiesen werden.

d. Zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene auf der nämlichen Senkrechten zu ihr liegen und gleiche Entfernungen von ihr haben, heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf die Ebene; die Ebene heißt ihre Symmetralebene. Zwei räumliche Gebilde heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene, wenn jedem Punkt des einen Gebildes ein Punkt des andern Gebildes entspricht, der zu ihm symmetrisch in Bez. auf die Ebene ist.

8. a. Projiziert man einen beliebigen Punkt A (Fig. 2) einer Geraden AB auf eine Ebene M, und legt durch die Gerade und das projizierende Lot AF eine Ebene N, welche die Projektionsebene M nach FG schneidet: so bezeichnet man die Linie FG als die Projektion der Geraden auf die Ebene M. Die Ebene N heißt die projizierende Ebene. (Daß es gleichgültig ist, von welchem Punkt der Geraden das projizierende Lot gefällt wird, wird in B. 8. Zus. 3 bewiesen werden.) — Schneidet die Gerade die Projektionsebene, so geht (nach 6. b) ihre Projektion durch den Spurpunkt S.

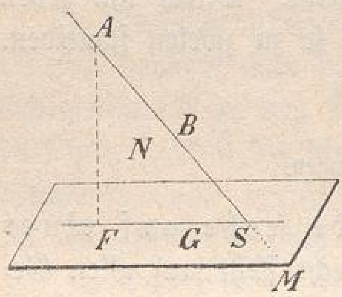


Fig. 2.

b. Eine Gerade heißt schief zu einer Ebene, wenn sie zu ihr weder parallel noch senkrecht ist. Unter dem Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene (oder auch der Ebene gegen die Gerade) versteht man dann den spitzen Winkel ASF (Fig. 2), den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene macht.

9. a. Zwei sich schneidende Ebenen M und M′ (Fig. 3) teilen den Raum in vier Teile, welche Keile oder Flächenwinkel heißen. Die Schnittlinie AB heißt ihre Keilkante oder Scheitelkante. Die durch die Keilkante begrenzten Ebenenstücke, die einen Keil einschließen, heißen

dessen Keilblätter. Ein Keil kann längs seiner Keilkante in sich selbst verschoben werden (nach 3. b).

Errichtet man in den zwei Keilblättern eines Keils im nämlichen Punkt C der Keilkante die Senkrechten CD und CD′ zur Keilkante, so heißt der von ihnen gebildete Winkel DCD′ der Keilwinkel. Für seine Größe ist die Wahl des Scheitelpunktes C gleichgültig. (Denn zwei Keilwinkel mit verschiedenen Scheitelpunkten können zur Deckung gebracht werden, indem der Keil in sich selbst verschoben wird.)

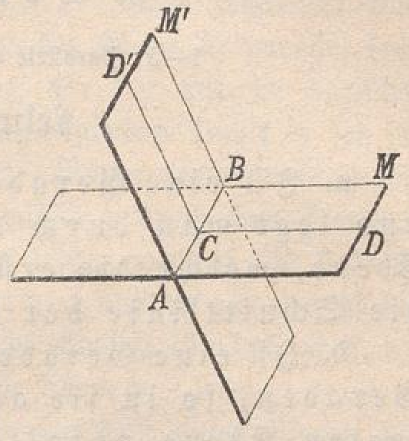


Fig. 3.

b. Zwei Keile heißen gleich, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei gleiche Keile haben gleiche Keilwinkel; denn bringt man die Keile zur Deckung und konstruiert ihre Keilwinkel für den nämlichen Punkt C der gemeinschaftlichen Kante, so decken sich auch diese Winkel. (Daß der Satz auch umgekehrt gilt, wird in B. 7. Zus. bewiesen werden.)

c. Ein Keil hat seinen Keilwinkel zum Maß; er hat ebensoviel Keilgrade als sein Keilwinkel Winkelgrade. Der Keilwinkel ist zugleich das Maß für die Größe der Drehung um die Keilkante, durch die das eine Keilblatt in die Lage des anderen gebracht werden kann. Ein Keil heißt spitz oder stumpf oder ein Rechter, wenn sein Keilwinkel spitz oder stumpf oder ein Rechter ist. Zwei Keile heißen Nebenkeile oder Scheitelkeile, wenn ihre Keilwinkel Nebenwinkel oder Scheitelwinkel sind.

d. Unter dem Neigungswinkel einer Ebene gegen eine andere Ebene versteht man den Keilwinkel des von beiden Ebenen gebildeten spitzen Keils.

e. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn einer der vier von ihnen gebildeten Keile ein Rechter ist. Auch die andern drei Keile sind dann Rechte.

B. Lehrsätze.

1—5: Parallele Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 1.

a. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet: so ist auch die Schnittlinie der Geraden parallel.

b. Ist eine Gerade parallel einer zweiten Geraden, so ist sie auch jeder durch diese gelegten Ebene parallel. Oder: Ist eine Gerade parallel einer in einer Ebene liegenden Geraden, so ist sie auch der Ebene parallel.

c. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden, so muß diese ganz in die Ebene fallen.

Beweis. a. Die Gerade sei g (Fig. 4), die ihr parallele Ebene sci M; die durch g gelegte Ebene N schneide M

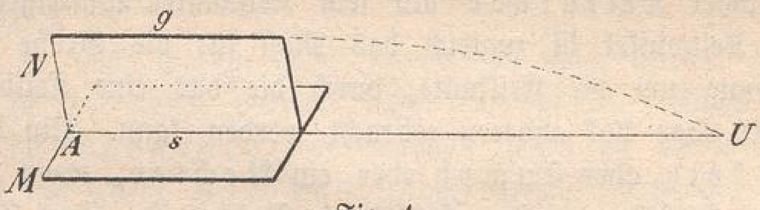


Fig. 4.

nach der Geraden s. Wäre nun s nicht ∥ g, so müßten beide sich schneiden, weil sie in einer Ebene N liegen. Der Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und der Ebene M, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich muß s ∥ g sein.

b. Die zwei parallelen Geraden seien g und s (Fig. 4);

durch s sei die Ebene M gelegt. Legt man durch g und s die Ebene N, so stellt s zugleich die Schnittlinie von N und M vor. Würde nun g die Ebene M schneiden, so müßte (nach I. Einl. 6. b) der Schnittpunkt U in der Schnittlinie s liegen, d. h. g müßte s schneiden; — was gegen die Voraussetzung ist. Folglich muß g der Ebene M parallel sein.

c. Die Gerade sei g (Fig. 4), die mit ihr parallele Ebene sei M; durch den in M liegenden Punkt A sei die Gerade s parallel zu g gezogen. Würde nun s nicht in die Ebene M fallen, so würde es außer s durch den Punkt A noch eine zweite Parallele zu g geben, nämlich die Schnittlinie der Ebene M mit der durch g und A gelegten Ebene N (nach Lehrs. a); — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich muß s in die Ebene M fallen.

Zusatz. Aus c folgt: 1) Die unendlich vielen Ebenen, die durch einen Punkt parallel mit einer Geraden gelegt werden können, schneiden sich alle nach einer und derselben Geraden, nämlich nach der durch den Punkt zu der Geraden gezogenen Parallelen. 2) Eine Gerade, die zweien Ebenen parallel ist, ist ihrer Schnittlinie parallel.

Lehrsatz 2.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die zwei Schnittlinien parallel.

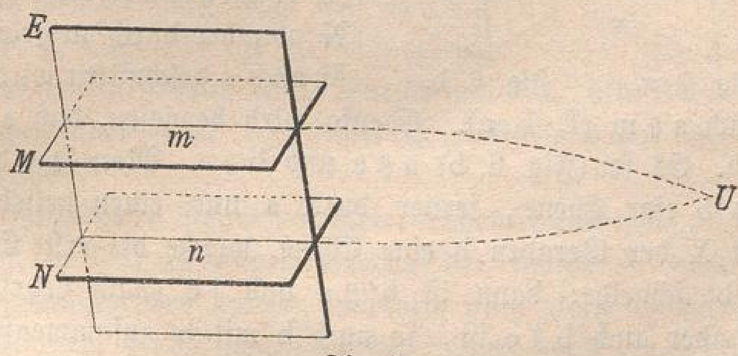


Fig. 5.

Beweis. Die zwei parallelen Ebenen M und N (Fig. 5) werden von der Ebene E geschnitten nach m und n. Wären nun m und n nicht parallel, so müßten sie sich schneiden, weil beide in der Ebene E liegen. Ihr Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der zwei Ebenen M und N, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich müssen m und n parallel sein.

(Direkter Beweis mittels I. Einl. 6. c und I. 1. a.)

Zusatz. Die unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt parallel mit einer Ebene gezogen werden können, liegen alle in einer und derselben Ebene, nämlich in der durch den Punkt zu der Ebene gelegten Parallelebene. (Bew. mittels I. 1. a, I. 2 und I. Einl. 4. b.)

Lehrsatz 3.

a. Legt man durch zwei parallele Gerade zwei Ebenen, die sich schneiden, so ist die Schnittlinie den zwei Geraden parallel.

b. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

Beweis. a. Die zwei parallelen Geraden seien m und n (Fig. 6. a), die durch sie gelegten Ebenen seien M und N, deren Schnittlinie sei s. Da m ‖ n, so ist m auch ‖ zu der durch n gelegten Ebene N (I. 1. b), und weil diese Ebene N von der durch m gelegten M nach s geschnitten wird, so ist auch s ‖ m (I. 1. a). Ebenso wird bewiesen, daß s ‖ n.

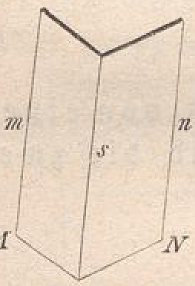


Fig. 6. a.

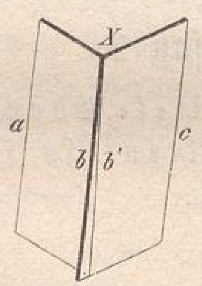


Fig. 6. b.

b. Es sei (Fig. 6. b) a ‖ c und b ‖ c. Man lege durch c und b eine Ebene, ferner durch a und einen beliebigen Punkt X der Geraden b eine Ebene, welche die erste Ebene nach b′ schneide; dann ist b′ ‖ a und ‖ c (nach Lehrs. a). Weil aber auch b ‖ c ist, so muß b mit b′ zusammenfallen (I. Einl. 4. b) und also auch ‖ a sein.

Zusatz. Lehrs. a läßt sich auch so aussprechen: Sind von den drei Schnittlinien dreier Ebenen (I. Einl. 6. d) zwei parallel, so sind alle drei parallel. Der Schnittpunkt der drei Ebenen kann dann als in unendliche Entfernung gerückt aufgefaßt werden.

Lehrsatz 4.

a. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, so sind ihre Ebenen parallel.

b. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, und sind beide Paare paralleler Schenkel gleich gerichtet oder beide entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel gleich.

Beweis. a. Würden die zwei Ebenen sich schneiden, so müßte (nach I. 3. a) die Schnittlinie parallel sein sowohl mit dem einen als mit dem andern Schenkel eines Winkels; — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

b. Die Winkel seien BAC und B′A′C′ (Fig. 7), es sei AB mit A′B′, AC mit A′C′ parallel und gleich gerichtet; man mache AB = A′B′ und AC = A′C′, ziehe BC, B′C′, ferner AA′, BB′, CC′. Da nun AB ⧺ A′B′, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm, also auch AA′ ⧺ BB′; ebenso beweist man, daß AA′ ⧺ CC′; daher ist auch BB′ ⧺ CC′ (I. 3. b), folglich BB′C′C ebenfalls ein Parallelogramm, also BC = B′C′. Hieraus aber folgt: △ ABC ≌ A′B′C′, daher W. BAC = B′A′C′.

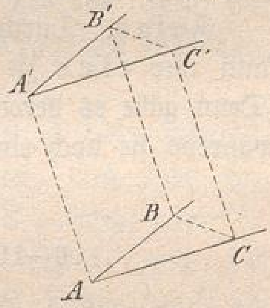


Fig. 7.

Sind beide Paare paralleler Schenkel entgegengesetzt gerichtet, so ist (nach obigem Beweis) der eine Winkel gleich dem Scheitelwinkel des andern und also auch gleich diesem selbst.

Zusatz. Aus b folgt, daß der Winkel, durch den der Winkel zweier windschiefen Geraden gemessen wird (I. Einl. 4. d), stets dieselbe Größe hat, wo auch sein Scheitel angenommen werden mag.

Lehrsatz 5.

Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

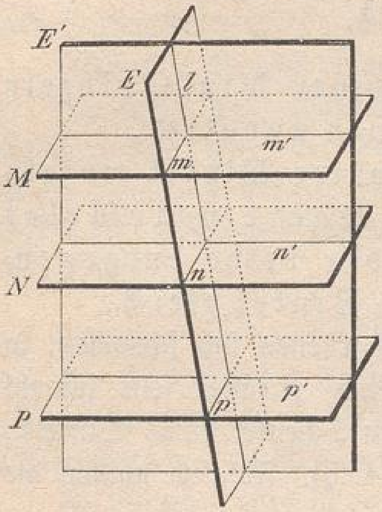


Fig. 8.

Beweis. Es sei (Fig. 8) Ebene M ∥ P und Ebene N ∥ P. Durch eine die drei Ebenen schneidende Gerade l lege man zwei weitere Ebenen E und E', welche die drei ersten schneiden nach m, n, p und m', n', p'. Dann ist m ∥ p und n ∥ p (I. 2), also auch m ∥ n. Ebenso wird bewiesen, daß m' ∥ n'. Nun schneiden sich m und m', n und n', und bilden also zwei Winkel, deren Schenkel einzeln parallel sind. Daher ist Ebene M ∥ N (I. 4. a).

Zusatz. Durch einen außerhalb einer Ebene liegenden Punkt kann nur eine zu dieser Ebene parallele Ebene gelegt werden. (Denn gäbe es deren zwei, so müßten sie unter sich parallel sein, während sie doch einen Punkt gemein haben.)

6—11: Senkrechte Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 6.

a. Steht eine Gerade senkrecht auf zwei andern sich schneidenden Geraden in deren Schnittpunkt, so steht sie auch auf der Ebene der zwei Geraden senkrecht.

b. Stehen mehrere Gerade senkrecht auf derselben Geraden in demselben Punkt, so liegen sie alle in einer Ebene, die zu der letzteren Geraden senkrecht ist.

Beweis. a. Es sei (Fig. 9) AB senkrecht auf den in der Ebene M liegenden Geraden AC und AD. Es ist (nach I. Einl. 7. a) zu beweisen, daß AB auch auf jeder andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden AE senkrecht steht. Zu diesem Zweck ziehe man in M eine beliebige Linie, welche die drei Geraden AC, AD, AE in C, D, E schneidet, verlängere ferner BA um eine Strecke AB′ = BA und verbinde B und B′ mit den drei Punkten C, D, E. Nun ist $\triangle$ ABC $\cong$ AB′C, und

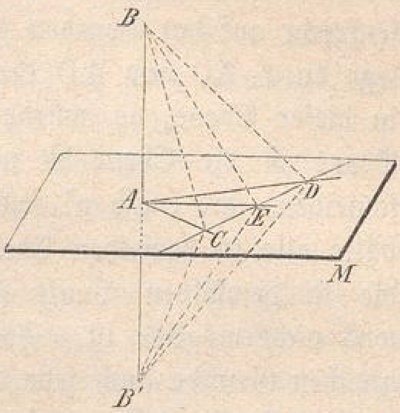


Fig. 9.

ABD $\cong$ AB′D, also BC = B′C und BD = B′D. Hieraus folgt: $\triangle$ BCD $\cong$ B′CD, W. BCD = B′CD, und daher auch $\triangle$ BCE $\cong$ B′CE, BE = B′E. Damit kann aber jetzt bewiesen werden, daß $\triangle$ ABE $\cong$ AB′E, folglich BAE ein rechter Winkel ist. — Ebenso wird bewiesen, daß AB senkrecht steht auf allen andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden. Folglich steht AB senkrecht auf der Ebene M.

Anderer Beweis. (Fig. 9*). Es ist stets möglich, die Linie CD in der Ebene M so zu ziehen, daß ihre zwischen AC und AD fallende Strecke durch AE halbiert wird**). Dann ist BE Schwerlinie des Dreiecks BCD, und AE Schwerlinie des Dreiecks ACD. Man hat daher (nach bekanntem Satze der ebenen Geometrie):

$$2\,(BE^2 + CE^2) = BC^2 + BD^2,$$
$$2\,(AE^2 + CE^2) = AC^2 + AD^2,$$
subtr.:
$$2\,(BE^2 - AE^2) = BC^2 - AC^2 + BD^2 - AD^2$$
$$= 2\,AB^2,$$

---

*) Man denke sich in Fig. 9 die von B′ ausgehenden Linien hinweg.

**) Man ziehe nämlich durch den beliebig gewählten Punkt E die Parallele mit CA, welche AD schneiden muß, in U; verlängere AU um ein Stück UD = AU, ziehe DE, welche AC schneiden muß, in C.

also: $BE^2 - AE^2 = AB^2$,
woraus folgt, daß BAE ein rechter Winkel ist.

b. Die Geraden AC, AD, AE, . . . stehen alle senkrecht auf der Geraden AB in demselben Punkt A. Man lege durch AC und AD die Ebene M. Läge nun AE nicht in dieser Ebene, so würde die durch AB und AE gelegte Ebene N die Ebene M nach einer andern Geraden AE′ schneiden, die (nach a) senkrecht zu AB sein müßte. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Gerade AE und AE′, die in demselben Punkt A auf AB senkrecht stünden, — was nicht möglich ist. Folglich muß AE — und aus dem gleichen Grunde auch jede der andern Senkrechten — in der durch AC und AD gelegten Ebene liegen.

Zusatz 1. Nennt man mit Bezugnahme auf I. Einl. 4. d zwei Windschiefe, deren Winkel ein Rechter ist: auf einander senkrecht, so läßt sich Lehrs. a folgendermaßen verallgemeinern: Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht steht auf irgend zweien in der Ebene liegenden (aber nicht parallelen) Geraden; sie steht alsdann auch senkrecht auf jeder andern in der Ebene gezogenen Geraden.

Zusatz 2. Lehrs. b läßt sich auch so ausdrücken: Dreht man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene, die auf dem ersten senkrecht steht. — Hieraus folgt weiter: Dreht man die durch einen Punkt und eine Gerade gelegte Ebene um die Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat der Punkt einen Kreis beschrieben, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse, dessen Halbmesser die von dem Punkt auf die Drehachse gefällte Senkrechte, und dessen Mittelpunkt der Fußpunkt dieser Senkrechten ist.

Zusatz 3. Die Ebene eines Keilwinkels (I. Einl. 9. a) steht senkrecht zur Keilkante.

Lehrsatz 7.

a. Auf einer Ebene läßt sich in einem Punkte derselben nur **eine** Senkrechte errichten, und auf eine Ebene läßt sich von einem Punkt außerhalb derselben nur **eine** Senkrechte fällen.

b. Durch einen Punkt (auf oder außerhalb einer Geraden) läßt sich nur **eine** zu der Geraden senkrechte Ebene legen.

Beweis. a. Gäbe es durch den Punkt A (welcher in oder außerhalb der Ebene M liegen mag) zwei Senkrechte zu M, so würden diese (nach I. Einl. 7. a) auch senkrecht stehen auf der Linie, nach der die durch beide Senkrechte gelegte Ebene N die Ebene M schneidet. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. Folglich kann es auf der Ebene durch den Punkt nur eine Senkrechte geben.

b. Gäbe es durch den Punkt A zwei senkrechte Ebenen M und M′ zu der Geraden g, so würden diese, falls A außerhalb g liegt (Fig. 10. a), von der durch

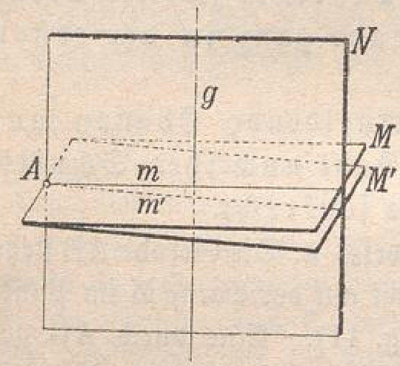


Fig. 10. a.

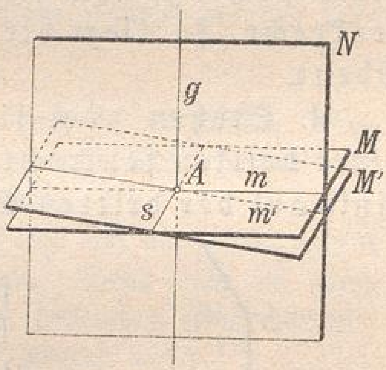


Fig. 10. b.

A und g gelegten Ebene N nach zwei Geraden m und m′ geschnitten werden, die (nach I. Einl. 7. a) auf g senkrecht stehen müßten. Man hätte also wieder in derselben Ebene zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. — Liegt der Punkt A auf der Geraden g (Fig. 10. b), so lege man die Ebene N beliebig durch g (doch so, daß sie nicht durch die Schnittlinie s der Ebenen M und M′ geht,) und mache den gleichen Schluß.

Zusatz. Mittels Lehrs. b und I. 6. Zus. 3 beweist man den Kehrsatz von I. Einl. 9. b: Zwei Keile sind gleich, wenn ihre Keilwinkel gleich sind. — Daraus folgt: Zwei Scheitelkeile sind gleich.

Lehrsatz 8.

a. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch sie gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

b. Steht eine Gerade, die in einer von zwei senkrechten Ebenen liegt, senkrecht auf deren Schnittlinie, so steht sie auch senkrecht auf der andern Ebene.

c. Stehen eine Gerade und eine Ebene, die einen Punkt gemein haben, auf einer zweiten Ebene senkrecht, so liegt die Gerade ganz in der ersten Ebene.

d. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf der dritten Ebene senkrecht.

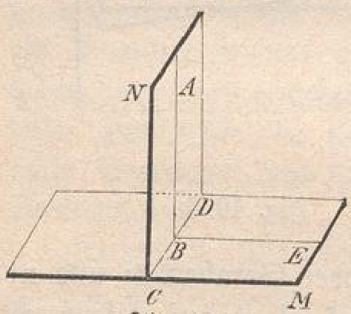


Fig. 11.

Beweis. a. Die Gerade AB stehe senkrecht auf der Ebene M im Punkt B (Fig. 11). Eine durch AB gelegte Ebene N schneide M nach der (durch B gehenden) Geraden CD. Man ziehe in der Ebene M die Linie BE $\perp$ CD. Da nun BA $\perp$ CD (I. Einl. 7. a) und BE $\perp$ CD ist, so ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils (I. Einl. 9. a); es ist aber W. ABE = R (I. Einl. 7. a), folglich stehen die zwei Ebenen auf einander senkrecht (I. Einl. 9. e).

b. Ebene N sei senkrecht auf Ebene M (Fig. 11), CD sei ihre Schnittlinie; in der Ebene N liege die Gerade AB, und es sei AB $\perp$ CD. Man ziehe in M die Linie BE $\perp$ CD; dann ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils, also W. ABE = R. Nun steht AB senkrecht auf BE und BD, folglich auch auf M (I. 6 a).

c. Die Gerade AB und die Ebene N, welche den Punkt A gemein haben, stehen beide senkrecht auf der Ebene M. Läge nun AB nicht in N, so könnte man in N durch A eine Gerade AB′ senkrecht zu ihrer Spurlinie CD ziehen, welche (nach b) auch senkrecht zu M wäre; es würden also durch A zwei Senkrechte zu M vorhanden sein; — was nicht möglich ist (I. 7. a). Folglich muß AB in N liegen.

d. Die zwei Ebenen N und N′ seien senkrecht auf der Ebene M. Von einem beliebigen Punkte der Schnittlinie der Ebenen N und N′ fälle man die Senkrechte auf M; dann muß diese (nach c) sowohl in N als in N′ liegen, also mit der Schnittlinie von N und N′ zusammenfallen; folglich steht die Schnittlinie senkrecht auf M.

Zusatz 1. Lehrs. a läßt sich auch so ausdrücken: Eine Ebene steht auf einer andern Ebene senkrecht, wenn sie auf einer in dieser liegenden Geraden senkrecht steht.

Zusatz 2. Durch eine Gerade läßt sich nur eine Ebene senkrecht zu einer andern Ebene legen. (Denn gäbe es deren zwei, so würden, nach b, von einem beliebigen Punkt der Geraden zwei Senkrechte auf die Ebene möglich sein.)

Zusatz 3. Die projizierende Ebene (I. Einl. 8. a) einer Geraden steht (nach a) senkrecht auf der Projektionsebene und enthält (nach c) die projizierenden Lote ihrer sämtlichen Punkte; die Projektionen der einzelnen Punkte liegen daher alle in der Projektion der Geraden. Es ist folglich gleichgültig, welcher Punkt einer Geraden zur Konstruktion ihrer Projektion verwendet wird. Man erhält sie auch als Verbindungslinie der Projektionen von zwei beliebigen Punkten, oder als Verbindungslinie der Projektion eines beliebigen Punktes mit dem Spurpunkt. Die

Projektion einer Strecke ist identisch mit der Verbindungsstrecke der Projektionen ihrer Endpunkte. — Die Projektion einer zur Projektionsebene senkrechten Geraden ist ein Punkt, welcher identisch ist mit ihrem Spurpunkt.

Lehrsatz 9.

a. Ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel in einer Ebene liegt, projiziert sich auf diese Ebene wieder als rechter Winkel.

b. Ist die Projektion eines Winkels, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt, ein Rechter, so ist der Winkel selbst ein Rechter.

Beweis. **a.** Der Winkel ABC (Fig. 12*), dessen Schenkel BC in der Ebene M liegt, sei ein Rechter. Fällt man AF ⊥ M und zieht FB, so ist FB die Projektion von AB auf M (I. 8. Zus. 3). Nun stehen CB und FA auf einander senkrecht (I. 6. Zus. 1); außerdem steht CB senkrecht auf BA, folglich steht CB senkrecht auf der Ebene BFA (I. 6. Zus. 1), und daher auch senkrecht auf BF.

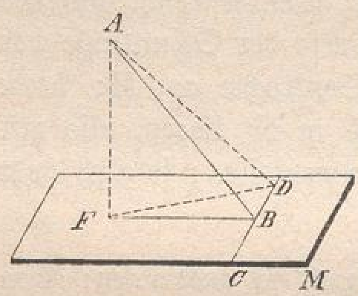


Fig. 12.

b. Der Winkel FBC (Fig. 12), welcher die Projektion des Winkels ABC auf die Ebene M vorstellt, sei ein Rechter. Nun ist CB ⊥ BF und ⊥ FA, folglich ⊥ auf der Ebene BFA, und daher auch ⊥ BA.

Anderer Beweis. **a.** Ist D (Fig. 12) ein beliebiger Punkt auf BC, und zieht man DA und DF, so ist:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 - AB^2 \\ &= (AF^2 + FD^2) - (AF^2 + FB^2) \\ &= FD^2 - FB^2, \end{aligned}$$

folglich: $FB \perp BD.$

---

*) Man denke sich in Fig. 12 die Linien AD und FD zunächst hinweg.

b. Macht man dieselbe Konstruktion wie in Bew. a, so ist:

$$BD^2 = FD^2 - FB^2$$
$$= (AD^2 - AF^2) - (AB^2 - AF^2)$$
$$= AD^2 - AB^2,$$

folglich: $AB \perp BD$.

Zusatz. Es giebt noch einen zweiten Kehrsatz, nämlich: Hat man zwei rechte Winkel, die einen Schenkel und den Scheitel gemeinsam haben, und fällt von einem Punkt des freien Schenkels des ersten Winkels die Senkrechte auf den freien Schenkel des zweiten, so steht diese senkrecht auf der Ebene des zweiten Winkels. (Beweis ähnlich wie a und b oder indirekt.)

Lehrsatz 10.

a. Steht die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

b. Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Beweis. a. Es sei (Fig. 13) $AB \parallel A'B'$, und $AB \perp$ auf der Ebene M. B und B' seien die Spurpunkte von AB und A'B'. Zieht man in der Ebene M durch B zwei beliebige Gerade BC und BD, und durch B' die Parallelen B'C' und B'D' zu ihnen, so ist W. ABC = A'B'C' und W. ABD = A'B'D' (I. 4. b). Da nun die W. ABC und ABD Rechte sind, so müssen auch die W. A'B'C' und A'B'D' Rechte sein. Folglich ist $A'B' \perp M$ (I. 6. a).

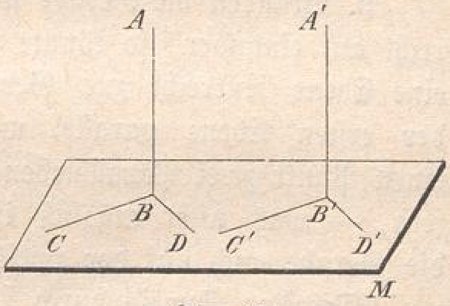


Fig. 13.

b. Es sei $AB \perp M$ und $A'B' \perp M$; wäre nun A'B' nicht parallel AB, so könnte man durch B' eine Gerade B'A'' parallel BA ziehen, welche (nach a) $\perp$ M wäre; es würden also auf M in B' zwei Gerade senkrecht stehen, —

was nicht möglich ist (I. 7. a); folglich muß $A'B' \parallel AB$ sein.

Zusatz. Aus b folgt: Die Projektionen paralleler Geraden auf irgend eine Ebene sind parallel. (Denn nach b und I. 4. a sind die projizierenden Ebenen parallel, folglich nach I. 2 auch die Projektionen.)

Lehrsatz 11.

a. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind die Ebenen parallel.

b. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. a. Wären die Ebenen nicht parallel, so würden sie sich schneiden. Würde man dann einen beliebigen Punkt der Schnittlinie verbinden mit den zwei Spurpunkten der Geraden, so entstünde ein Dreieck, in dem zwei Winkel Rechte wären; — was nicht möglich ist. Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

(Direkter Beweis durch I. 4. a.)

b. Stünden die Gerade und die zweite Ebene nicht senkrecht auf einander, so könnte man durch ihren Schnittpunkt eine Ebene senkrecht zur Geraden legen, welche (nach a) der ersten Ebene parallel wäre; es würden also durch einen Punkt zwei Parallelebenen zu einer Ebene vorhanden sein, — was nicht möglich ist (I. 5. Zus.). Folglich muß die Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

(Direkter Beweis durch I. 2 und I. 6. a.)

12—15: Maß-Beziehungen.

Lehrsatz 12.

Von allen Strecken, die zwischen einem Punkte und einer Ebene liegen, ist

a. **die auf der Ebene senkrechte Strecke die kürzeste.**

b. **Alle diejenigen sind gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt sind.**

c. **Sie sind um so größer, je weiter ihre Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt sind.**

Beweis. a. Ist A (Fig. 14) der Punkt, M die Ebene, AF die von A auf M gefällte Senkrechte, AB irgend eine andere Strecke zwischen A und M: so ziehe man FB. Nun ist $\triangle$ AFB rechtwinklig, folglich Kathete AF kleiner als Hypotenuse AB.

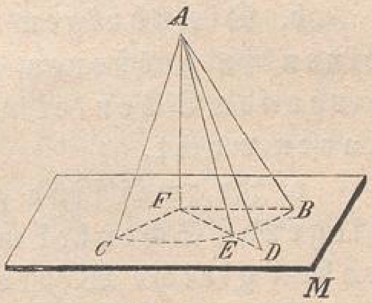


Fig. 14.

b. Ist AC (Fig. 14) eine dritte Strecke zwischen A und der Ebene, und ist FC = FB, so ist $\triangle$ AFC $\cong$ AFB, folglich AC = AB.

c. Ist AD (Fig. 14) eine vierte Strecke, und liegt ihr Fußpunkt D so, daß FD > FB, so kann man von FD ein Stück FE = FB abschneiden. Zieht man dann AE, so ist in der Ebene AFD : AD > AE; da aber AE = AB (nach b), so ist auch AD > AB.

Zusatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zusatz 2. Aus b folgt: Der geometrische Ort eines Punktes, der in einer Ebene liegt und von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kreislinie, — gleichgültig ob der feste Punkt in der Ebene oder außerhalb derselben liegt. Das gleiche gilt für den geometrischen Ort einer Geraden, die in einer Ebene liegt und von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat (Beweis durch I. 9. b). — Ferner folgt: Der geometrische Ort eines Punktes, der von allen Punkten (und allen Tangenten) einer Kreislinie gleich weit entfernt ist, ist die auf der Ebene des Kreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte.

Lehrsatz 13.

Ist eine Gerade schief zu einer Ebene, so ist unter den Winkeln, die sie mit den durch ihren Spurpunkt in der Ebene gezogenen Geraden macht,

a. der spitze Winkel, den sie mit ihrer Projektion macht, der kleinste, dessen Nebenwinkel der größte.

b. Die übrigen Winkel sind um so größer, einen je größeren Winkel der in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden macht.

c. Je zwei sind gleich, deren in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden gleiche Winkel machen.

Beweis. a. Die Gerade SA (Fig. 15) schneide die Ebene M in S; man fälle $AF \perp M$ und ziehe SF, dann ist SF die Projektion von SA auf die Ebene M (I. 8. Zus. 3). SB sei eine beliebige andere durch S gehende Gerade in M; man schneide von ihr $SB = SF$ ab, ziehe AB und FB. Dann ist in den zwei Dreiecken ASF und ASB : $SA = SA$, $SF = SB$, $AF < AB$ (I. 12. a);

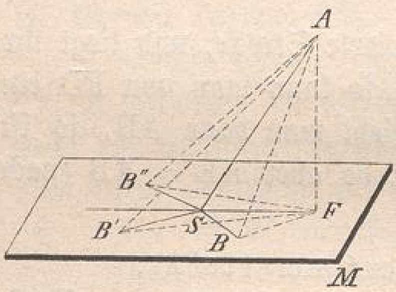


Fig. 15.

folglich (nach bekanntem Satz der ebenen Geometrie): W. $ASF < ASB$. — Hieraus folgt zugleich, daß der Nebenwinkel von ASF der größte ist. (Denn gäbe es einen noch größeren, so müßte dessen Nebenwinkel noch kleiner als W. ASF sein.)

b. Ist SB′ (Fig. 15) eine weitere durch S gehende Gerade in M, und ist W. $FSB' > FSB$, so mache man $SB' = SB$ und ziehe AB′ und FB′; dann ergiebt sich zunächst aus der Vergleichung der zwei Dreiecke FSB′ und FSB : $FB' > FB$;

hieraus folgt: AB′ > AB (I. 12. c), worauf sich weiter aus der Vergleichung der zwei Dreiecke ASB′ und ASB ergiebt: W. ASB′ > ASB.

c. Liegt SB″ (Fig. 15) in M auf der andern Seite von SF so, daß W. FSB″ = FSB′: so mache man wieder SB″ = SB′ und ziehe AB″ und FB″; dann ist △ FSB″ ≌ FSB′, FB″ = FB′, und daher AB″ = AB′ (I. 12. b); hieraus aber folgt: △ ASB″ ≌ ASB′, W. ASB″ = ASB′.

Zusatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zusatz 2. Die Neigung einer Geraden gegen eine Ebene (I. Einl. 8. b) wird also durch den kleinsten zwischen der Geraden und der Ebene möglichen Winkel gemessen, ebenso wie die Entfernung eines Punktes von einer Ebene durch die kleinste zwischen Punkt und Ebene mögliche Strecke gemessen wird.

Zusatz 3. Lehrs. I. 9. b kann als spezieller Fall von Lehrs. c angesehen werden.

Lehrsatz 14.

a. Eine Gerade macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel.

b. Parallele Gerade machen mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

c. Parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich.

d. Werden mehrere Gerade von einer Anzahl paralleler Ebenen geschnitten, so sind die Abschnitte der einzelnen Geraden zwischen denselben Ebenen einander proportioniert.

Beweis. a. Fällt man von einem beliebigen Punkt der Geraden auf eine der parallelen Ebenen die Senkrechte, so steht diese auch senkrecht auf den übrigen (I. 11. b). Legt man daher durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene, so stellen deren Schnittlinien mit den parallelen Ebenen die Projektionen der Geraden auf diese vor (I. Einl. 8. a). Da aber die Schnittlinien alle unter sich parallel sind (I. 2), so macht die Gerade mit allen ihren Projektionen gleiche Winkel, folglich auch mit allen Ebenen (I. Einl. 8. b).

b. Folgt aus I. 10. Zus. und I. 4. b.

c. Sind AB und A′B′ zwei parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm (I. 2), folglich AB = A′B′.

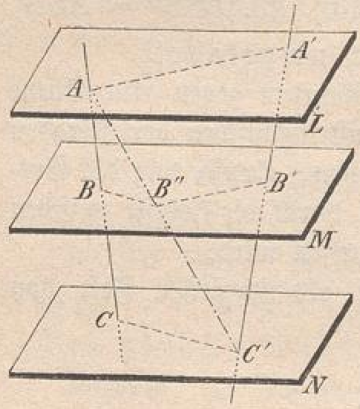


Fig. 16.

d. Zwei Gerade werden von den parallelen Ebenen L, M, N (Fig. 16) geschnitten in den Punkten A, B, C und A′, B′, C′. Man ziehe AC′, welche die M schneidet in B″; die Ebene CAC′ schneidet dann M nach BB″, N nach CC′, und es ist BB″ ∥ CC′ (I. 2), woraus folgt: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C'}$. Ebenso giebt die Ebene AC′A′ die parallelen Schnittlinien AA′ und B″B′, woraus folgt: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB''}{B''C'}$. Daher ist auch: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Zusatz 1. Sind zwei Ebenen parallel, so sind (nach Lehrs. c und I. 10. b) alle Punkte der einen Ebene von der andern gleich weit entfernt; diese konstante Entfernung wird als die Entfernung der zwei parallelen Ebenen bezeichnet. — Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat, wird gebildet von zwei Ebenen, die in der geg. Entfernung parallel mit der ersten Ebene zu beiden Seiten derselben liegen.

Zusatz 2. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so haben alle ihre Punkte gleiche Entfernung von der Ebene; diese Entfernung wird als die Entfernung der Geraden von der Ebene bezeichnet.

Zusatz 3. Die (in d besprochenen) zwischen einer Anzahl paralleler Ebenen liegenden Abschnitte einer beliebigen Geraden ſind den Entfernungen der parallelen Ebenen proportioniert. (Hiernach anderer Beweis von d.)

Zuſatz 4. Eine Ebene macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel. (I. 6. Zuſ. 3 und I. 10. a.)

Lehrſatz 15.

Zwiſchen zwei windſchiefen Geraden giebt es immer eine Strecke, die auf beiden ſenkrecht ſteht und zugleich die kürzeſte Strecke zwiſchen ihnen iſt.

Beweis. Die zwei windſchiefen Geraden ſeien AB und CD (Fig. 17). Durch einen beliebigen Punkt C der Geraden CD ziehe man die Parallele CE zu AB und lege durch CD und CE die Ebene M; dann iſt AB ∥ M (I. 1. b). Hierauf fälle man von einem beliebigen Punkt F′ der Geraden AB die Senkrechte F′G′ auf M und ziehe

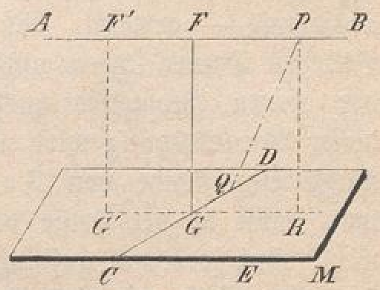


Fig. 17.

durch den Fußpunkt G′ die Parallele zu AB, welche in der Ebene M liegt (I. 1. c) und, da ſie auch ∥ CE iſt, CD ſchneiden muß, in G. Endlich ziehe man in der Ebene ABG′G durch G die Parallele zu G′F′, welche AB ſchneidet in F. Es iſt nun FG ⊥ M (I. 10. a), alſo ⊥ CD und ⊥ G′G, und weil AB ∥ G′G, auch ⊥ AB. Folglich iſt FG die auf AB und CD ſenkrechte Strecke.

Zieht man zwiſchen AB und CD eine beliebige andere Strecke PQ, ſo iſt dieſe ſtets größer als FG. Denn fällt man PR ⊥ M, ſo iſt PR < PQ (I. 12. a), alſo, weil PR = FG (I. 14. Zuſ. 2), auch FG < PQ.

Anmerkung. FG heißt die kürzeſte Entfernung oder auch ſchlechtweg die Entfernung der zwei windſchiefen Geraden.

Zuſatz. Durch eine von zwei windſchiefen Geraden läßt ſich ſtets eine Ebene parallel zur andern legen und nur eine. — Durch zwei windſchiefe Gerade läßt ſich ſtets ein Paar paralleler

Ebenen legen und **nur eines**. Ihr Abstand ist gleich der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. Diese kann auch erhalten werden als Schnittlinie der zwei Ebenen, die senkrecht zu den zwei parallelen Ebenen durch die Windschiefen gelegt werden.

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Postulat der Stereometrie. Bezüglich der praktischen Ausführbarkeit von Konstruktionen im Raum wird in der Stereometrie die Voraussetzung — aber nur die **eine** Voraussetzung — gemacht, daß man durch gegebene Punkte nach Belieben Ebenen legen und in jeder Ebene die Konstruktionen der ebenen Geometrie ausführen könne. Mit Zugrundelegung dieser Voraussetzung wird in den folgenden Nummern 1—6 zunächst eine Reihe von **Fundamentalaufgaben** gelöst, die man dann in der Folge bei stereometrischen Konstruktionen benützt, ohne jedesmal auf ihre Einzelausführung zurückzugehen (in ähnlicher Weise wie dies in der ebenen Geometrie bezüglich des Ziehens von Parallelen, Senkrechten u. s. w. geschieht).

1—6: Fundamentalaufgaben.

Aufgabe 1.

a. **Durch einen geg. Punkt eine Gerade parallel zu einer geg. Geraden zu ziehen.**

b. **Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu einer geg. Ebene zu legen.**

Auflösung. a. Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und vollziehe die übrige Konstruktion in dieser.

b. Man ziehe in der geg. Ebene zwei beliebige Gerade, die sich schneiden, ziehe zu ihnen durch den geg. Punkt die Parallelen (Aufg. a) und lege durch diese eine Ebene: so ist sie die verlangte.

(Beweise durch I. Einl. 4. b und I. 4. a.)

Aufgabe 2.

a. Durch eine geg. Gerade eine Ebene parallel zu einer zweiten geg. Geraden zu legen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu zweien geg. Geraden zu legen.

Auflösung. a. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der ersten Geraden die Parallele zur zweiten (Aufg. 1. a) und lege durch die erste Gerade und die Parallele eine Ebene: so ist diese die verlangte.

b. Man ziehe durch den Punkt die Parallelen zu den zwei geg. Geraden und lege durch sie eine Ebene: so ist diese die verlangte.

(Beweise durch I. 1. b.)

Aufgabe 3.

a. Durch einen auf einer Geraden geg. Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden zu legen.

b. Durch einen außerhalb einer Geraden geg. Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch die Gerade zwei beliebige Ebenen, errichte in ihnen auf der Geraden in dem geg. Punkt je eine Senkrechte, und lege durch die zwei Senkrechten eine Ebene: so ist diese die verlangte.

b. Man fälle in der durch Punkt und Gerade gelegten Ebene die Senkrechte von dem Punkt auf die Gerade, errichte in deren Fußpunkt auf der Geraden (in einer beliebig durch sie gelegten Ebene) eine zweite Senkrechte, und lege durch beide Senkrechte eine Ebene: so ist diese die verlangte.

(Beweise durch I. 6. a.)

Aufgabe 4.

a. Von einem außerhalb einer Ebene geg. Punkt die Senkrechte auf die Ebene zu fällen.

b. Auf einer Ebene in einem geg. Punkt derselben die Senkrechte zu errichten.

Auflösung. a. Ist M (Fig. 18*) die geg. Ebene, A der geg. Punkt, so ziehe man in M eine Gerade CD beliebig, fälle in der durch A und CD gelegten Ebene: AB ⊥ CD, ziehe in der Ebene M: BF ⊥ CD, und fälle in der durch AB und BF gelegten Ebene: AF ⊥ BF, so ist AF die verlangte Senkrechte.

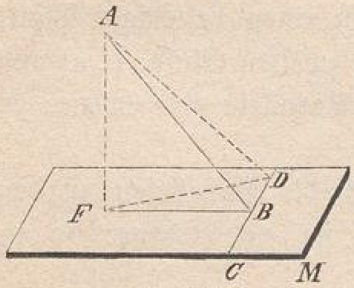


Fig. 18.

b. Ist M (Fig. 18) die geg. Ebene, F der geg. Punkt, so ziehe man in M eine Gerade CD beliebig, fälle FB ⊥ CD, ziehe in einer beliebig durch CD gelegten Ebene: BA ⊥ CD, und errichte in der durch FB und BA gelegten Ebene: FA ⊥ FB, so ist FA die verlangte Senkrechte.

(Beweise durch I. 9. Zus.)

Aufgabe 5.

Durch eine geg. Gerade eine Ebene senkrecht zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkt der Geraden die Senkrechte auf die Ebene (Aufg. 4. a) und lege durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene: so ist diese die verlangte. (Liegt die Gerade in der geg. Ebene, so kommt Aufg. 4. b zur Anwendung.)

(Beweis durch I. 8. a.)

---

*) Man denke sich in Fig. 18 die Linien AD und FD hinweg.

Aufgabe 6.

a. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer ihr nicht parallelen Ebene zu bestimmen.

b. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Man fälle (Fig. 19) von einem beliebigen Punkt A der geg. Geraden AB die Senkrechte AF auf die geg. Ebene M (Aufg. 4. a) und ziehe in der durch AB und AF gelegten Ebene FG ⊥ FA: so schneidet FG die Gerade AB in dem verlangten Punkt S.

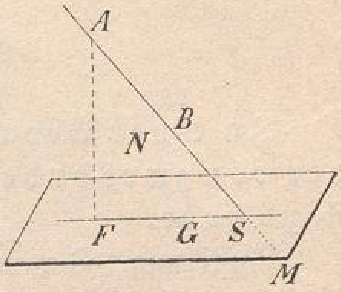


Fig. 19.

b. Man ziehe in einer der zwei geg. Ebenen zwei beliebige Gerade und bestimme deren Schnittpunkte mit der andern Ebene (Aufg. a): so ist die Verbindungslinie dieser zwei Schnittpunkte die verlangte Schnittlinie. (Bei Ausführung der Konstruktion benütze man die vom Schnittpunkt der zwei Geraden auf die andere Ebene gefällte Senkrechte.)

(Beweise durch I. 6. b und I. Einl. 6. b.)

7—10: Beispiele von Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 7.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel zu einer geg. Richtungslinie eine Gerade zu ziehen, die zwei geg. windschiefe Gerade schneide.

Auflösung. **a.** Man lege durch den geg. Punkt und eine der zwei geg. Geraden eine Ebene, bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden (Aufg. 6. a), und verbinde diesen mit dem geg. Punkt: so ist die Verbindungslinie die verlangte Gerade.

b. Man lege parallel zu der geg. Richtungslinie durch die eine der zwei geg. Geraden eine Ebene (Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden, und ziehe durch diesen die Parallele zur geg. Richtungslinie: so ist sie die verlangte Gerade.

(Beweise durch Einl. 4. a und I. 1. c.)

Aufgabe 8.

In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von zwei andern Ebenen je einen geg. Abstand habe.

Auflösung. Der verlangte Punkt soll 1) in der Ebene M liegen, 2) von der Ebene N den Abstand a, 3) von der Ebene N′ den Abstand a′ haben. — Die Ebene M stellt einen geom. Ort für ihn vor. Die zweite Bedingung liefert einen zweiten geom. Ort, der (nach I. 14. Zus. 1) aus zwei Ebenen besteht, die parallel zu N im Abstand a zu beiden Seiten von N liegen; sie schneiden die Ebene M nach zwei parallelen Geraden, auf denen der gesuchte Punkt liegen muß. Um also diese Geraden zu konstruieren, errichte man in einem beliebigen Punkt der Ebene N die Senkrechte (Aufg. 4. b), schneide auf ihr vom Fußpunkt aus nach beiden Seiten die Strecke a ab, lege durch die Endpunkte Ebenen parallel zu N (Aufg. 1. b), und bestimme deren Schnittlinien mit M (Aufg. 6. b). In gleicher Weise erhält man aus der dritten Bedingung als dritten geom. Ort ein zu N′ paralleles Ebenenpaar, welches die Ebene M nach einem zweiten Geradenpaar schneidet, das ebenso konstruiert wird. Beide Geradenpaare schneiden sich nun in 4 Punkten, von denen jeder eine Lösung der Aufgabe vorstellt. — (Die geg. Ebenen M, N, N′ dürfen nicht zu einer und derselben Geraden parallel sein.)

Aufgabe 9.

In einer Ebene durch den Spurpunkt einer geg. Geraden eine Linie zu ziehen, die mit der Geraden einen geg. Winkel mache.

Auflösung. Die geg. Gerade g (Fig. 20) schneide die geg. Ebene M in A; der geg. (spitze) Winkel sei w. Angenommen, AD wäre die gesuchte Linie, so fälle man von einem beliebigen Punkt B der Geraden g die Senkrechte BC auf M und ziehe AC; dann ist AC die Projektion von AB auf M. Fällt man ferner CD ⊥ AD und zieht BD, so ist auch BD ⊥ AD (I. 9. b). In der so entstandenen Figur

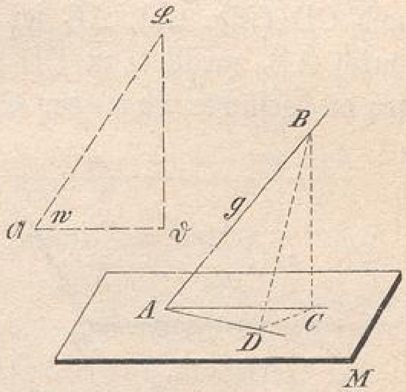


Fig. 20.

ist nun △ ABC nach Gestalt und Lage bekannt; △ ABD kann seiner Gestalt nach bestimmt werden aus Hyp. AB und W. BAD = w. Dann aber kann auch △ ACD aus Hyp. AC und Kath. AD nach Gestalt und Lage in der Ebene M gezeichnet werden, wodurch AD gefunden ist. Man hat demnach folgende Konstruktion:

Von einem beliebigen Punkt B der Geraden g fälle man BC ⊥ M (Aufg. 4. a) und ziehe AC; hierauf konstruiere man (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck 𝔄𝔅𝔇 aus Hyp. 𝔄𝔅 = AB und W. 𝔅𝔄𝔇 = w; endlich zeichne man in der Ebene M ein rechtw. Dreieck ACD über AC als Hyp. mit AD = 𝔄𝔇 als Kath.: so ist AD die verlangte Gerade. — Wäre Winkel w stumpf, so würde man dieselbe Konstruktion mit seinem spitzen Supplement ausführen und schließlich DA über A verlängern.

Es giebt im allgemeinen zwei Auflösungen. Wann giebt es nur eine und wann wird die Aufgabe unmöglich? (Vgl. I. 13. c u. a, nebst Zus. 3.)

Aufgabe 10.

Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit beiden Geraden gleiche Winkel mache.

Auflösung. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 21), AC sei ihre kürzeste Entfernung, M die durch AB parallel zu CD gelegte Ebene (vgl. I. 15). BD sei die gesuchte Lage der Strecke, BD mache also mit BA und DC gleiche Winkel. Zieht man nun durch B die Parallele BF zu CD (welche nach I. 1. c in M liegen muß), so macht BD auch mit BA und BF gleiche Winkel; bestimmt man daher die Projektion von BD auf M, indem man DE $\perp$ M fällt und BE zieht, so muß auch die Projektion BE mit BA und BF gleiche Winkel machen (I. 13. c mit Zus. 1). Zieht man noch AE, so ist AE $\parallel$ CD $\parallel$ BF, folglich W. BEA = EBF = EBA, also $\triangle$ BEA gleichschenklig, AB = AE = CD. — Da nun das rechtw. $\triangle$ BDE seiner Gestalt nach gezeichnet werden kann aus BD = der geg. Strecke und DE = der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen, so ergiebt sich folgende Konstruktion:

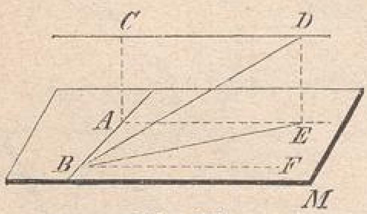


Fig. 21.

Man bestimme (nach I. 15) die kürzeste Entfernung AC der zwei Geraden und zeichne (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck BDE aus Hyp. BD = der geg. Strecke und Kath. DE = CA; hierauf ziehe man durch A die Parallele AE zu CD und lege zwischen die Schenkel von W. BAE die Strecke BE = BE so hinein, daß AB = AE wird; zieht man endlich in der Ebene CDEA durch E die Parallele zu AC, welche CD schneidet in D, und zieht BD: so ist diese die verlangte Strecke.

Es giebt im allgemeinen vier Auflösungen; (statt des

W. EAB können nämlich auch die drei anderen von AB und AE gebildeten Winkelräume benützt werden.)

Zusatz. Werden zwei windschiefe Gerade von einer dritten Geraden so geschnitten, daß diese mit beiden gleiche Winkel macht, so liegen die Schnittpunkte gleich weit entfernt von den Fußpunkten der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen; und umgekehrt.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.*)

I. Lehrsätze.

1—17: Gerade und Ebenen, Strecken und Winkel.

1. Ist einem windschiefen Viereck (d. h. einem Viereck, dessen vier Ecken nicht in einer Ebene liegen) ein ebenes Viereck einbeschrieben, so schneiden sich je zwei Gegenseiten des ebenen Vierecks auf einer Diagonale des windschiefen. (I. Einl. 6. d.)

2. Liegen zwei Dreiecke ABC und A'B'C', deren Ebenen nicht parallel sind, so, daß die drei Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken sich in einem Punkt schneiden, so müssen sich je zwei entsprechende Dreieckseiten schneiden, und müssen die drei Schnittpunkte in gerader Linie liegen; und umgekehrt. (Satz von Desargues.) (I. Einl. 4. a und 6. d.)

3. a. Ist von zwei parallelen Geraden die eine einer Ebene parallel, so ist es auch die andere. (I. 1. a und b.)

b. Ist eine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch der andern parallel.

4. Legt man durch einen festen Punkt (Zentrum) und eine Gerade eine Ebene (projizierende Ebene) und bringt diese zum Schnitt mit einer festen Ebene (Bildebene), so heißt die Schnittlinie die Zentralprojektion der Geraden auf die Ebene von dem Punkt aus. — Die Zentralprojektionen einer Anzahl paralleler Geraden schneiden sich alle in einem Punkt (Flucht-

*) Diejenigen Sätze, welche zur Lösung von späteren Aufgaben unerläßlich sind und welche auch außerhalb des Anhanges noch Verwertung finden, sind durch ein Kreuz (†) ausgezeichnet.

punkt), nämlich im Spurpunkt des durch das Zentrum zu den Geraden gezogenen Parallelstrahls. (I. Einl. 4. b u. 6. b.)

5. a. Eine Gerade und eine Ebene, die senkrecht auf einer zweiten Ebene stehen, sind zu einander parallel. (I. 8. b, I. 10. b, I. 1. b, oder indirekt.)

b. Eine Gerade und eine Ebene, die senkrecht zu einer zweiten Geraden stehen, sind zu einander parallel.

c. Ist die eine von zwei parallelen Ebenen senkrecht zu einer dritten Ebene, so ist es auch die andere.

6. Sind zwei Ebenen senkrecht zu je einer von zwei windschiefen Geraden, so ist ihre Schnittlinie parallel der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. (I. Anh. 5. b und I. 1. Zus. 2.)

† 7. Haben zwei Keile parallele Keilblätter, so sind auch die Keilkanten parallel, und die Keile gleich oder supplementär.

8. Stehen eine Gerade und eine Ebene senkrecht auf einander, so komplementieren sich ihre Neigungswinkel gegen eine zweite Ebene.

† 9. Zieht man durch einen beliebigen Punkt die Senkrechten zu zwei Ebenen, so sind die von den Senkrechten eingeschlossenen Winkel gleich den Keilwinkeln der von den Ebenen gebildeten Keile; und zwar ist der Winkel, dessen Schenkel die Strecken zwischen dem Punkt und den zwei Fußpunkten sind, das Supplement des Keils, innerhalb dessen der Punkt liegt.

† 10. Ist M eine Ebene (die man sich in horizontaler Lage vorstellen mag), N eine zweite, gegen die erste geneigte Ebene, und zieht man in N eine Gerade senkrecht zu ihrer Spurlinie mit M, so heißt diese Gerade eine N e i g u n g s l i n i e oder eine L i n i e d e s G e f ä l l s der Ebene N in Beziehung auf die Ebene M, und es gilt der Satz: der Neigungswinkel der Ebene N gegen die Ebene M ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Neigungslinie. (I. 9. a.)

11. Macht eine Gerade mit zweien sich schneidenden Ebenen gleiche Winkel, so haben ihre Spurpunkte gleiche Abstände je von der andern Ebene und gleiche Abstände von der Schnittlinie beider Ebenen; und umgekehrt.

12. Steht eine Gerade schief zu einer Ebene M, so hat unter allen Ebenen, die durch sie gelegt werden können, a) diejenige den kleinsten Neigungswinkel gegen M, deren Spurlinie senkrecht

zur Geraden ist; b) je zwei Ebenen, deren Spurlinien gleiche Winkel mit ihr bilden, haben gleiche Neigungswinkel; c) der Neigungswinkel ist um so größer, je kleiner der spitze Winkel ist, den die Spurlinie mit der Geraden macht. (I. Anh. 10.) — Die Sätze gelten auch umgekehrt.

13. a. Die Mitten der vier Seiten eines windschiefen Vierecks liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines Parallelogramms; desgleichen die Mitten je zweier Gegenseiten und der zwei Diagonalen.

b. Die drei Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenseiten und der zwei Diagonalen eines windschiefen Vierecks schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in ihm gegenseitig.

14. Schneidet man die vier Seiten eines windschiefen Vierecks durch eine Ebene, die den zwei Diagonalen parallel ist, so bilden die Schnittpunkte die Ecken eines Parallelogramms, und werden die vier Seiten in den Schnittpunkten proportioniert geteilt. (I. 15. Zus. und I. 14. d.) (Spezialfall von I. Anh. 1.)

† 15. a. Zwei ebene Vielecke, deren Ecken zu einander symmetrisch sind in Bez. auf eine Ebene, sind kongruent. Je zwei entsprechende Seiten der Vielecke schneiden sich in einem Punkt der Symmetralebene und haben gleiche Neigung gegen sie. Die zwei Vielecksebenen schneiden sich nach einer Geraden der Symmetralebene und haben gleiche Neigung gegen sie.

† b. Schneiden zwei Ebenen eine dritte Ebene nach der nämlichen Geraden unter gleichen Neigungswinkeln, so sind sie symmetrisch in Bez. auf die dritte Ebene, d. h. sie werden von jeder zu ihr senkrechten Geraden in zwei symmetrischen Punkten geschnitten.

† c. Sind in Bez. auf eine Ebene die Keilblätter eines Keils einzeln symmetrisch zu den Keilblättern eines andern Keils, so sind auch die Keilkanten symmetrisch und die Keile gleich. (Schneidet die von einem bel. Punkt C der einen Keilkante auf die Symmetralebene gefällte Senkrechte CF die Keilblätter des andern Keils in C' und C'', so muß, nach b, FC' = FC'' sein. Man konstr. dann in C und C' die Keilwinkel.)

† 16. Sind zwei Punkte oder Gerade oder Ebenen symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene, so hat jeder Punkt der Symmetralebene gleiche Abstände von den zwei Punkten oder Geraden oder Ebenen.

17. Schneidet man auf zwei windschiefen Geraden von den Fußpunkten ihrer kürzesten Entfernung aus vier gleiche Strecken ab, so hat die Verbindungsstrecke zweier Endpunkte die gleiche Länge und bildet mit den zwei Windschiefen die gleichen Winkel wie die Verbindungsstrecke der zwei andern Endpunkte. (Vgl. I. Aufg. 10.)

18—24: Geometrische Örter.

† 18. a. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei festen Punkten gleich weit entfernt ist, ist eine Ebene, die auf der Verbindungsstrecke der zwei Punkte in deren Mitte senkrecht steht. Sie heißt die Mittellotebene der Strecke. (Vgl. I. Anh. 16.)

b. Der geom. Ort eines Punktes, der von drei festen Punkten gleich weit entfernt ist, ist eine Gerade, die auf der durch die drei Punkte gelegten Ebene im Mittelpunkt des durch sie beschriebenen Kreises senkrecht steht. (Vor. Satz oder I. 12. Zus. 2.)

† 19. a. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt ist, wird gebildet von zwei Ebenen, die auf der Ebene der Geraden in den Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel senkrecht stehen. Eine solche Ebene heißt die Mittellotebene des zugehörigen Winkels. (Vgl. I. Anh. 16.)

† b. Die Mittellotebene eines Winkels ist zugleich der geom. Ort eines Strahls, der vom Scheitel des Winkels ausgeht und mit beiden Schenkeln gleiche Winkel macht. (I. 13. c.)

c. Macht eine Gerade mit drei in einer Ebene liegenden und durch ihren Spurpunkt gehenden Geraden gleiche Winkel, so sind diese Winkel Rechte, und steht also die Gerade senkrecht auf der Ebene.

† 20. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Ebenen gleich weit entfernt ist, wird gebildet von zwei Ebenen, welche durch die Schnittlinie der ursprüngl. zwei Ebenen gehen und die von ihnen gebildeten Keile halbieren. Sie stehen auf einander senkrecht und heißen die Medianebenen der zugehörigen Keile. (Vgl. I. Anh. 16.)

† 21. a. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Ebenen ein geg. Verhältnis der Entfernungen hat, wird von zwei Ebenen gebildet, die durch die Schnittlinie der zwei ursprüngl. Ebenen gehen. (Wie werden sie gefunden?)

b. Diese zwei Ebenen bilden zusammen mit den ursprünglichen zwei Ebenen ein harmonisches Ebenenbüschel. Ein solches hat die Eigenschaft, daß es von jeder Geraden nach vier harmonischen Punkten, und von jeder Ebene nach vier harmonischen Strahlen geschnitten wird. (Bew. zuerst für eine Gerade, die in einer zur Schnittlinie der vier Ebenen senkrechten Ebene liegt, hierauf mit Hilfe einer solchen — für eine beliebige Gerade.)

c. Werden vier durch eine gemeinschaftliche Schnittlinie gehende Ebenen von einer Geraden nach vier harmonischen Punkten, oder von einer Ebene nach vier harmonischen Strahlen geschnitten, so gilt dasselbe von jeder andern Schnittgeraden und Schnittebene.

22. a. Wird ein Ebenenbüschel (d. i. eine Anzahl von Ebenen, die durch die nämliche gerade Linie gehen) von einer Anzahl paralleler Geraden geschnitten, so sind die Abschnitte der letzteren zwischen denselben Ebenen einander proportioniert.

b. Werden zwei sich schneidende Ebenen von einer Schar paralleler Geraden geschnitten, und liegt auf jeder Geraden ein Punkt, der die Strecke zwischen ihren zwei Spurpunkten in einem geg. Verhältnis teilt, so ist der geom. Ort dieses Punktes eine Ebene, die durch die Schnittlinie der zwei ursprüngl. Ebenen geht.

† 23. a. Werden zwei parallele Ebenen von beliebigen Geraden geschnitten, und liegt auf jeder Geraden ein Punkt, der die Strecke zwischen ihren zwei Spurpunkten in einem geg. Verhältnis teilt, so ist der geom. Ort dieses Punktes eine Ebene, die den zwei ursprüngl. Ebenen parallel ist und ihre Entfernung in dem geg. Verhältnis teilt. (Kehrsatz von I. 14. d.)

b. Befinden sich zwischen zwei Ebenen drei gleiche und parallele Strecken, die nicht in einer Ebene liegen, so sind jene zwei Ebenen parallel. (Kehrsatz von I. 14. c.)

24. Legt man durch zwei windschiefe gerade Linien zwei beliebige Ebenen, und zieht in einer Medianebene der von ihnen gebildeten Keile parallel zur Keilkante beliebig eine Gerade, so hat diese von den zwei Windschiefen gleiche kürzeste Entfernungen. (I. 15. Zus. und I. Anh. 20.)

25—31: Projektionssätze.

† 25. a. Die Projektion eines ebenen Vielecks auf eine zu seiner Ebene parallele Projektionsebene ist dem Vieleck kongruent.

b. Zieht man durch die Ecken eines ebenen Vielecks in beliebiger Richtung Parallelen, die eine mit der Vielecks-Ebene parallele Ebene schneiden, so bilden die Schnittpunkte die Ecken eines zweiten Vielecks, das dem ersten kongruent ist.

† 26. Die Projektionen paralleler Strecken sind parallel und den Strecken proportioniert.

27. a. Die Projektion eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel der Projektionsebene parallel ist, ist wieder ein rechter Winkel. (I. 9. a.)

b. Ein Rechteck, dessen eine Seite der Projektionsebene parallel ist, projiziert sich wieder als Rechteck. — Ein Rhombus, dessen eine Diagonale der Projektionsebene parallel ist, projiziert sich wieder als Rhombus.

28. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so ist ihre Projektion auf eine beliebige Projektionsebene senkrecht zu der Spurlinie der Ebene.

29. a. Legt man durch die Halbierungslinie eines Winkels oder seines Nebenwinkels eine Ebene, so haben die Schenkel gleiche Neigung gegen die Ebene, und ihre Projektionen auf die Ebene machen mit der Halbierungslinie gleiche Winkel. (Man schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab.)

b. Die Halbierungslinie eines Winkels projiziert sich auf eine zu ihr oder zur Halbierungslinie des Nebenwinkels parallele Ebene als Halbierungslinie der Projektion des Winkels.

30. Die Summe der Neigungswinkel einer Geraden gegen zwei zu einander senkrechte Ebenen liegt zwischen 0 und R. (I. 13. a.) (Wann ist die Summe = 0, und wann = R?)

† 31. Werden verschiedene in einer Ebene liegende Vielecke auf eine zweite Ebene projiziert, so sind ihre Inhalte den Inhalten ihrer Projektionen proportioniert, und zwar verhält sich jedes Vieleck zu seiner Projektion wie eine beliebige Strecke einer Neigungslinie der Vielecks-Ebene (I. Anh. 10) zu ihrer Projektion. Der Satz gilt auch für Vielecke von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten. (Man beweise den Satz zuerst für ein Trapez, dessen eine Seite in der Spurlinie der Vielecksebene liegt und dessen zwei parallele Seiten Neigungslinien sind. Ein beliebiges Vieleck läßt sich dann als algebr. Summe von solchen Trapezen darstellen.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben, die durch zweckmäßig gelegte Ebenen, bezw. geometrische Örter gelöst werden.

1. a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel zu einer geg. Richtungslinie eine Gerade zu ziehen, die eine geg. Gerade und eine geg. Kreislinie schneide. (Wie viele Lösungen? Wann wird die Lösung unmöglich?)*)

2. a. Zwischen einen Punkt und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer zweiten Ebene parallel sei. (I. 2. Zus.)

b. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die eine Ebene und eine zu dieser parallele Gerade so schneide, daß das zwischen beide fallende Stück eine geg. Länge habe.

3. Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei.

Anm. Ist zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke zu legen, die gewisse Bedingungen erfüllen soll, so lege man durch die Geraden das Paar paralleler Ebenen (I. 15. Zus.), versuche dann, die Strecke zunächst zwischen die zwei Ebenen beliebig zu legen, doch so, daß sie der verlangten Lage parallel ist, und bringe sie schließlich (ähnlich wie in I. 15) durch Parallelverschiebung in die richtige Lage. Häufig (wie z. B. hier) genügt eine einzige der zwei parallelen Ebenen.

4. Geg. ein Punkt, eine Gerade und zwei Ebenen. Durch den Punkt eine Gerade zu ziehen, welche die geg. Gerade schneide und mit den zwei Ebenen zwei Schnittpunkte erzeuge, deren Entfernungen von dem geg. Punkt ein geg. Verhältnis haben.

5. a. In einer Ebene eine gerade Linie so zu ziehen, daß jeder ihrer Punkte von zwei außerhalb der Ebene geg. Punkten gleich weit entfernt sei. (I. Anh. 18. a.)

b. Auf einer Geraden oder Kreislinie einen Punkt zu bestimmen, der von zwei geg. Punkten gleich weit entfernt sei.

c. In einer Ebene einen Punkt zu finden, der von drei außerhalb der Ebene geg. Punkten gleich weit entfernt sei. (I. Anh. 18. b.)

---

*) Diese Fragen sind bei sämtlichen Aufgaben zu stellen.

6. Statt der Punkte in Aufg. 5. a, b und c seien Ebenen geg., von denen die gesuchten Punkte gleiche Entfernungen haben sollen. (I. Anh. 20.)

7. a. Eine Gerade zu finden, die dreien geg. parallelen Geraden parallel sei und von ihnen gleiche Entfernungen habe.

b. Geg. drei Ebenen, deren Schnittlinien parallel sind. Eine Gerade zu finden, die den drei Ebenen parallel sei und von ihnen gleiche Entfernungen habe.

8. Ein geg. Dreieck so zu legen, daß seine drei Ecken einzeln in einem geg. Punkt, auf einer geg. Geraden und in einer geg. Ebene liegen. (Bestimmung der in der Ebene liegenden Ecke entw. mittels des geom. Ortes der zugehör. Dreieckshöhe oder mittels I. 12. Zus. 2.)

9. Einen Punkt zu finden, der von vier geg. Punkten gleich weit entfernt sei.

10. a. Einen Punkt zu finden, der von vier geg. Ebenen gleich weit entfernt sei.

b. Einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von vier geg. Ebenen sich verhalten wie $m : n : p : q$. (I. Anh. 21. a.) (Im allgem. 8 Lösungen. Vgl. III. Anh. 16. d Schlußbem.)

11. Einen Punkt zu finden, der von den vier Seiten eines windschiefen Vierecks gleich weit entfernt sei. (I. Anh. 19. a.) (Im allgem. 8 Lösungen.)

12. a. Auf einer Geraden oder Kreislinie einen Punkt zu bestimmen, der von einer geg. Ebene eine geg. Entfernung habe. (I. 14. Zus. 1.)

b. Einen Punkt zu finden, der von drei geg. Ebenen geg. Entfernungen habe.

c. Eine Gerade zu finden, die zweien geg. Ebenen parallel sei und von jeder eine geg. Entfernung habe.

13. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von zwei geg. Ebenen eine geg. Summe oder Differenz haben. (I. 14. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

14. Andere Lösung von I. Aufg. 10 mit Hilfe von I. Anh. Anm. zu Aufg. 3 und I. Anh. 19. b.

15. Eine Gerade zu finden, die einer geg. Geraden parallel sei und von zwei anderen Geraden gleiche geg. kürzeste Entfernungen habe. (I. Anh. 24, I. 3. a oder I. 15. Zus., I. 14. Zus. 1.)

16. Eine Gerade zu bestimmen, die drei windschiefe Gerade so schneide, daß die durch die drei Schnittpunkte begrenzten Strecken ein geg. Verhältnis haben. (I. 15. Zus., I. Anh. 23. a, I. Aufg. 7. a.)

17. Eine Gerade zu finden, die zwei gegenüberliegende Seiten eines windschiefen Vierecks proportioniert schneide und auf einer von ihnen senkrecht stehe. (I. 15. Zus., I. 14. d, I. 6. b, I. 1. Zus. 2, I. Aufg. 7. b.)

18. a. Die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden zu finden durch eine ähnliche Konstruktion wie bei der vor. Aufgabe. (I. Anh. 6, I. Aufg. 7. b.)

b. Eine Gerade zu finden, die von vier geg. Geraden zwei schneide und zu den zwei andern senkrecht sei.

19. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Summe der Entfernungen von zwei außerhalb gelegenen Punkten einen kleinsten Wert habe. (Man lege durch die Gerade und jeden der zwei Punkte eine Ebene und drehe die eine Ebene um die Gerade, bis sie mit der andern zusammenfällt.)

b. In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, dessen Summe der Entfernungen von zwei auf der nämlichen Seite der Ebene gelegenen Punkten einen kleinsten Wert habe.

20. a. In einer Ebene den geom. Ort eines Punktes zu ermitteln, dessen Verbindungslinien mit zwei außerhalb der Ebene geg. festen Punkten gleiche Neigung gegen die Ebene haben.

b. In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit drei außerhalb gelegenen Punkten gleiche Neigung gegen die Ebene haben.

21—32: Aufgaben, die durch Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken gelöst werden (z. T. ähnlich wie I. Aufg. 9 und 10).

21. a. In einer Ebene durch einen geg. Punkt (oder parallel einer geg. Richtung) eine Gerade zu ziehen, die von einem außerhalb gelegenen Punkt eine geg. Entfernung habe.

b. In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, die von zwei außerhalb gelegenen Punkten geg. Abstände habe.

22. a. In einer horizontalen Ebene einen Punkt zu bestimmen, in dem eine Strecke von geg. Länge vertikal aufgestellt werden

muß, um von zwei in der Ebene geg. Punkten unter geg. Sehwinkeln gesehen zu werden.

b. In einer horizontalen Ebene einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei auf der Ebene aufstehende vertikale Strecken unter geg. Sehwinkeln erscheinen.

23. a. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung habe.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene zu legen, die einer geg. Geraden parallel sei und von ihr eine geg. Entfernung habe.

c. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die von zwei geg. Geraden geg. kürzeste Entfernungen habe. (Mit Hilfe von b.)

24. Von einem auf einer Geraden geg. Punkt nach einer Ebene eine Strecke von geg. Länge zu legen, so daß sie mit der Geraden einen geg. Winkel mache.

25. Durch einen Punkt einer in einer Ebene geg. Geraden eine Gerade zu ziehen, die mit der Ebene und der Geraden je einen geg. Winkel mache.

26. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer geg. Ebene einen geg. Winkel mache.

27. a. Durch den einen Schenkel eines geg. Winkels eine Ebene zu legen, die gegen den andern Schenkel eine geg. Neigung habe.

b. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die gegen eine andere Gerade eine geg. Neigung habe.

28. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die gegen eine Ebene eine geg. Neigung habe und parallel einer zweiten Ebene sei.

29. a. Zwischen eine Gerade (oder Kreislinie) und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie parallel einer zweiten Ebene sei und mit der ersten Ebene einen geg. Winkel mache. (Vor. Aufg.)

b. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie parallel einer zweiten Ebene sei und mit der Geraden einen geg. Winkel mache. (I. Aufg. 9.)

c. Zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) durch eine Gerade zu verbinden, die parallel einer geg. Ebene sei und mit einer der zwei (bezw. mit der) geg. Geraden einen geg. Winkel mache. (I. Aufg. 7. b, bezw. I. Anh. Aufg. 1. b.)

30. a. Geg. zwei Punkte und eine Gerade. Auf der Geraden einen dritten Punkt zu finden, so daß das durch die drei Punkte bestimmte Dreieck einen geg. Inhalt habe. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit einer von ihnen einen geg. Winkel mache.

31. Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß ihre Projektion auf eine geg. Ebene eine geg. Länge habe. (Man suche die Strecke zunächst von dem Spurpunkt der einen Windschiefen nach der durch die andere gehenden Parallelebene zu legen.)

32. Ein geg. Quadrat so zu legen, daß zwei gegenüberliegende Ecken auf zwei windschiefen Geraden liegen, und daß es sich auf eine geg. Ebene als Rhombus von geg. Inhalt projiziere. (I. Anh. 27. b und 31. Durch Anwendung von I. Anh. Aufg. 3 erhält man zwei, durch Anwendung der vor. Aufg. zwei weitere Lösungen.)

Zweites Buch.

Krumme Flächen und Vielkant.

A. Einleitung.

1: Allgemeine Umdrehungsflächen.

1. a. Diejenigen Körper, welche bloß von ebenen Flächen begrenzt sind, heißen ebenflächige Körper oder Polyeder. Diejenigen, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt sind, heißen krummflächige Körper. Von den letzteren werden in der elementaren Stereometrie nur die Umdrehungskörper betrachtet.

b. Dreht sich eine ebene geschlossene Figur um eine in ihrer Ebene liegende und sie nicht schneidende Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat sie einen Körper beschrieben oder erzeugt, welcher Umdrehungskörper genannt wird; ihre Peripherie hat eine krumme Fläche beschrieben, welche Umdrehungsfläche heißt und welche die Oberfläche des Umdrehungskörpers bildet.

c. Da bei der Drehung der Figur jeder Punkt ihrer Peripherie einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse ist, und dessen Mittelpunkt im Fußpunkt der von dem Punkt auf die Drehachse gefällten Senkrechten liegt (I. 6. Zus. 2): so schneiden alle zur Achse senkrechten Ebenen die Umdrehungsfläche nach Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen, und welche Parallelkreise heißen. Das Stück der Fläche oder des Körpers zwischen zwei Parallelkreisen heißt eine Zone der Fläche oder des Körpers. — Da jede durch die Achse gelegte Ebene angesehen werden kann als die Ebene der gedrehten Figur in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage, so schneiden alle durch die Achse gelegten Ebenen die Fläche nach kongruenten Figuren, welche Achsenschnitte oder Meridiane heißen. Jeder Meridian besteht aus zwei kongruenten und gegen die Achse symmetrisch liegenden Teilen (Halbmeridianen), deren jeder der gedrehten Figur kongruent ist.

d. Unter den Umdrehungs-Körpern und -Flächen sind von besonderer Wichtigkeit: der Umdrehungs-Cylinder, der Umdrehungs-Kegel und die Kugel.*)

2—4: Cylinder und Kegel.

2. a. Dreht sich ein Rechteck OO′A′A (Fig. 22) um eine seiner Seiten OO′ als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Umdrehungscylinder oder kurz: Cylinder heißt. Die drei andern Seiten haben seine Oberfläche beschrieben; und zwar haben die der Achse anliegenden Seiten OA und O′A′ zwei gleiche, zur Achse senkrechte und daher unter sich parallele Kreise beschrieben (I. 6.

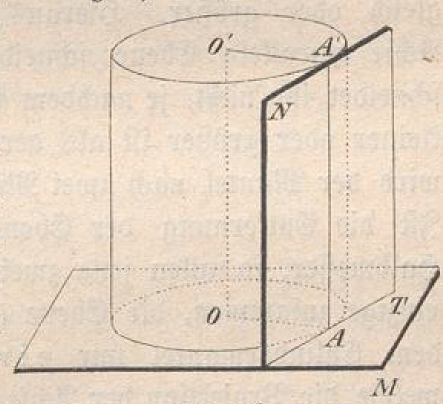


Fig. 22.

*) Nach 1. b müßte strenge genommen unterschieden werden zwischen „Cylinder, Kegel, Kugel" und „Cylinderfläche, Kegelfläche, Kugelfläche". Doch gebraucht man die Worte „Cylinder, Kegel, Kugel" häufig nicht bloß zur Bezeichnung des Körpers, sondern auch der Fläche, ähnlich wie in der ebenen Geometrie das Wort „Kreis" sowohl für „Kreisfläche" als für „Kreislinie" gebraucht wird.

Zus. 2 und I. 11. a), welche die Grundkreise heißen; die der Achse gegenüberliegende Seite AA′ hat eine krumme Fläche erzeugt, welche der Mantel des Cylinders heißt.

b. Da der Mantel von einer Geraden beschrieben worden ist, so liegen auf ihm unendlich viele Gerade; sie heißen Mantellinien und sind alle mit der Achse parallel und gleich, also auch unter sich parallel und gleich (I. 3. b). Die Entfernung der zwei Grundkreis-Ebenen heißt die Höhe des Cylinders; sie ist gleich der Achse und gleich den Mantellinien (I. 14. Zus. 1). Alle Parallelkreise sind unter sich und mit den Grundkreisen gleich; jeder Parallelkreis-Halbmesser heißt ein Halbmesser des Cylinders. Der Achsenschnitt ist ein Rechteck, dessen Seiten zwei Mantellinien und zwei Grundkreis-Durchmesser sind.

c. Ein Punkt oder eine mit der Achse parallele Gerade liegt innerhalb des Cylinders oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem die Entfernung des Punktes oder der Geraden von der Achse kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine mit der Achse parallele Ebene schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Im ersten Fall wird der Mantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. 1. c). Ist die Entfernung der Ebene von der Achse gleich dem Halbmesser, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene (Ebene N in Fig. 22) hat mit dem Cylindermantel nur eine Mantellinie AA′ gemein, welche die Projektion der Achse auf die Ebene vorstellt; (denn jede andere in ihr parallel zu AA′ gezogene Gerade fällt außerhalb des Cylinders nach I. 12. a.) Eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Cylindermantels, die Mantellinie AA′ heißt ihre Berührungsmantellinie. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene. Die Schnittlinie AT der Berührungsebene mit einer Grundkreis-Ebene

M ist Tangente an den Grundkreis; denn sie hat mit ihm nur einen Punkt gemein, nämlich den Endpunkt A der Berührungsmantellinie. Um daher (Fig. 22) die Berührungsebene zu konstruieren, die den Cylindermantel längs einer geg. Mantellinie AA′ berührt, zieht man an einen Grundkreis im Endpunkt A der Mantellinie die Tangente AT und legt durch Tangente AT und Mantellinie AA′ eine Ebene.

d. Aus c (Anf.) folgt ferner: Eine gerade Linie schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre kürzeste Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die kürzeste Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Gerade mit dem Cylindermantel nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der kürzesten Entfernung. Eine solche Gerade heißt eine Tangente des Cylindermantels, jener Punkt — ihr Berührungspunkt. Jede Gerade, die auf einem Halbmesser in seinem Endpunkt senkrecht steht, ist Tangente, (denn der Halbmesser steht auch senkrecht auf der Achse). Daher ist auch jede in einer Berührungsebene gezogene Gerade Tangente.

3. a. Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck SOA (Fig. 23) um eine seiner Katheten SO als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Umdrehungskegel oder kurz: Kegel heißt. Die zwei andern Seiten haben die Oberfläche des Kegels beschrieben; diese besteht

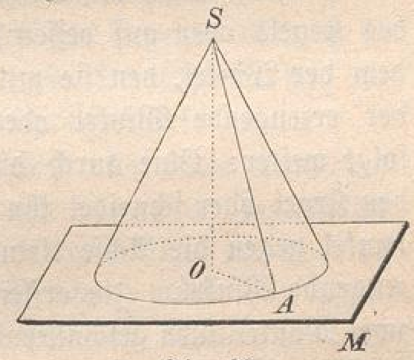


Fig. 23.

aus dem von der andern Kathete OA beschriebenen Grundkreis, welcher senkrecht zur Achse ist, und aus dem von der Hypotenuse SA beschriebenen krummen Mantel des Kegels. — Der Winkel OSA zwischen der Achse und der Hypotenuse heißt der erzeugende Winkel des Kegelmantels. Der Endpunkt S der Achse heißt die Spitze, ihre Entfernung von der Ebene des Grundkreises die Höhe des Kegels; die Höhe ist gleich der Achse.

b. Jede Gerade, die von der Spitze nach einem Punkt der Peripherie des Grundkreises gezogen wird, kann als die Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage betrachtet werden; sie liegt daher auf dem Kegelmantel und heißt eine Mantellinie des Kegels. Alle Mantellinien sind gleich lang und machen mit der Achse gleiche Winkel. Jeder Halbmesser OA des Grundkreises stellt die Projektion der durch seinen Endpunkt gehenden Mantellinie SA auf die Ebene des Grundkreises vor. Da nun der Winkel SAO stets die nämliche Größe hat, so sind alle Mantellinien gegen die Grundkreis-Ebene gleich geneigt, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels. — Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Seiten zwei Mantellinien und ein Grundkreis-Durchmesser sind. Der Dreieckswinkel an der Spitze (gleich dem doppelten erzeugenden W.) heißt die Öffnung des Kegels.

c. Eine durch die Spitze gehende Gerade liegt innerhalb des Kegels oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem der Winkel, den sie mit der Achse macht, kleiner ist als der erzeugende Winkel oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine durch die Spitze gelegte Ebene schneidet den Kegel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihr Neigungswinkel gegen die Achse kleiner oder größer ist als der erzeugende Winkel. Im ersten Fall wird der Kegelmantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. Einl. 2). Ist der Neigungswinkel gleich dem erzeugenden Winkel, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene hat mit dem Kegelmantel nur eine Mantellinie gemein, welche mit der Projektion der Achse auf die Ebene zusammenfällt, (denn jede andere durch die Spitze in der Ebene gezogene Gerade liegt außerhalb des Kegelmantels nach I. 13. a). Eine solche

Ebene N (Fig. 24*) heißt eine Berührungsebene des Kegelmantels; die gemeinsame Mantellinie ST heißt ihre Berührungsmantellinie. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene STO. Die Schnittlinie TB der Berührungsebene mit der Ebene des Grundkreises ist (wie beim Cylinder) Tangente an den Grundkreis. Daher Konstruktion der Berührungsebene wie beim Cy-

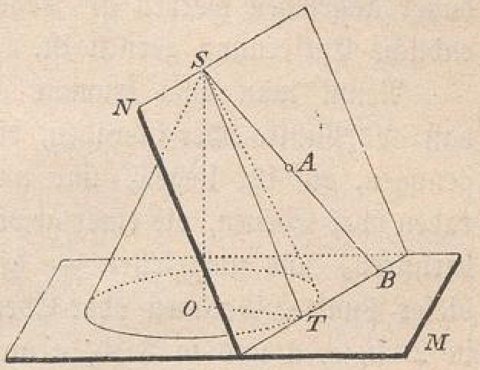


Fig. 24.

linder. — Der Neigungswinkel einer Berührungsebene N gegen die Ebene des Grundkreises ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Berührungsmantellinie ST; denn ST stellt eine Neigungslinie der Ebene N vor (I. 9. b und I. Anh. 10). Daher haben alle Berührungsebenen gleiche Neigung gegen die Ebene des Grundkreises, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels.

d. Jede in einer Berührungsebene liegende Gerade ist Tangente an den Kegelmantel. Ihr Schnittpunkt mit der Berührungsmantellinie ist ihr Berührungspunkt.

4. a. Der Mantel eines Kegels und eines Cylinders stellt nur einen Teil — nämlich eine Zone — der Cylinderfläche und Kegelfläche im weiteren Sinne des Wortes vor. Die vollständige Fläche erhält man, wenn man sämtliche Mantellinien nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert. Die vollständige Kegelfläche besteht also aus zwei kongruenten Teilen, die in der Spitze zusammenhängen; sie wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei sich schneidenden unbegrenzten Geraden um die andere. (Ist der von den Geraden gebildete erzeugende Winkel ein Rechter, so erhält man als speziellen Fall der Kegelfläche die

*) Man denke sich in Fig. 24 die Linie SAB hinweg.

Ebene, vgl. I. 6. Zus. 2.) — Die Cylinderfläche wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei unbegrenzten parallelen Geraden um die andere. Die Cylinderfläche kann daher angesehen werden als Kegelfläche, deren Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Nennt man eine krumme Fläche von der Eigenschaft, daß alle Punkte oder Geraden, die einer gewissen Bedingung genügen, auf ihr liegen, und umgekehrt, oder daß alle Geraden oder Ebenen, die einer gewissen Bedingung genügen, sie berühren, und umgekehrt, — den geometrischen Ort dieser Punkte, Geraden oder Ebenen: so lassen sich die Sätze in 2. b, c, d und in 3. b, c auch in folgender Form aussprechen:

b. Der geom. Ort eines Punktes, der eine geg. Entfernung — oder einer Geraden, die eine geg. kürzeste Entfernung von einer festen Geraden hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

c. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die einer festen Geraden parallel ist und von ihr eine geg. Entfernung hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

d. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die eine feste Gerade in einem festen Punkt unter geg. Winkel schneidet, ist eine Kegelfläche, deren Achse die feste Gerade, deren Spitze der feste Punkt, und deren erzeugender Winkel gleich dem geg. Winkel ist.

e. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die durch einen festen Punkt geht und gegen eine feste Ebene eine geg. Neigung hat, ist eine Kegelfläche, deren Spitze der feste Punkt ist, deren Achse senkrecht zu der festen Ebene steht, und deren erzeugender Winkel gleich dem Komplement des geg. Neigungswinkels ist. (Der Satz bleibt auch für den Fall gültig, daß der Punkt in der Ebene selbst liegt, I. 14. a und Zus. 4.)

5—9: Die Kugel.

5. a. Dreht sich ein Halbkreis PCAP′ (Fig. 25) um seinen Durchmesser PP′ als Achse so lange herum, bis er wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat er einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Kugel heißt; seine Peripherie hat deren krumme Oberfläche beschrieben.

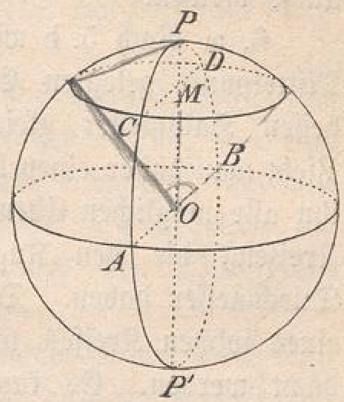


Fig. 25.

b. Der Mittelpunkt O des erzeugenden Halbkreises heißt der Mittelpunkt der Kugel. Jede vom Mittelpunkt an einen Punkt der Oberfläche gezogene Strecke heißt ein Halbmesser der Kugel. Alle Halbmesser sind gleich, denn jeder ist Halbmesser des erzeugenden Halbkreises in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage; alle Punkte der Kugeloberfläche sind daher vom Mittelpunkt gleich weit entfernt. Jede durch den Mittelpunkt gehende und von der Oberfläche begrenzte Strecke heißt ein Durchmesser der Kugel; jeder Durchmesser besteht aus zwei Halbmessern, daher sind auch alle Durchmesser einander gleich. Die zwei Endpunkte eines Durchmessers heißen Gegenpunkte oder Antipoden.

c. Aus b folgt: Der geom. Ort eines Punktes, der von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist. — Man sagt, die Kugelfläche sei aus dem festen Punkt mit der geg. Entfernung als Halbmesser beschrieben.

d. Eine Kugel ist vollständig und eindeutig bestimmt durch Mittelpunkt und Halbmesser. Zwei Kugeln, die gleiche Halbmesser haben, sind kongruent, und zwar decken sich ihre Oberflächen in jeder Lage, wenn nur die Mittelpunkte zusammenfallen. Eine auf einer Kugeloberfläche liegende Figur kann daher auf derselben beliebig so verschoben werden, daß dabei ihre sämtlichen Punkte beständig auf der Kugeloberfläche bleiben.

6. a. Nach 5. b wird eine Kugel von jeder durch ihren Mittelpunkt gelegten Ebene nach einem Kreise geschnitten, dessen Halbmesser gleich dem Halbmesser der Kugel ist. Zieht man daher einen beliebigen Durchmesser, und legt durch ihn alle möglichen Ebenen, so schneiden diese die Kugel nach Kreisen, die den Kugeldurchmesser zum gemeinschaftlichen Durchmesser haben. Die Kugel kann also durch Umdrehung eines solchen Kreises um jenen Durchmesser entstanden gedacht werden. Es kann somit jeder beliebige Durchmesser einer Kugel als deren Achse angesehen werden.

b. Da ein Umdrehungskörper von jeder zur Achse senkrechten Schnittebene nach einem Kreis geschnitten wird (1. c), bei der Kugel aber *jeder* Durchmesser als Achse genommen werden kann, so wird die Kugel von *jeder* Ebene (die überhaupt schneidet) nach einem Kreise geschnitten. Man nennt einen solchen Kreis einen *Kugelkreis*.

c. Der Mittelpunkt M (Fig. 25) eines Kugelkreises liegt (nach 1. c) auf dem zu seiner Ebene senkrechten Durchmesser. Dieser heißt die *Achse*, seine Endpunkte P und P′ heißen die *Pole* des Kreises. Zu jedem Kugelkreis gehören zwei bestimmte Pole, welche Gegenpunkte zu einander sind. Alle parallelen Kugelkreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole. Derjenige Parallelkreis, der durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt der den Polen zugehörige *Äquator*.

d. Da die Durchmesser AB, CD, . . . (Fig. 25) der einzelnen, zu derselben Achse PP′ gehörigen Parallelkreise zugleich Sehnen in einem durch die Achse gelegten Kugelkreis PCAP′BD sind, so ist unter allen Parallelkreisen der Äquator der größte. Da dies für jede beliebige Achse gilt, so ist der Kreis, nach welchem eine durch den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene schneidet, überhaupt der größte, nach dem eine Kugel geschnitten werden kann. Ein solcher Kreis heißt daher auch größter Kreis oder Großkreis der Kugel, wogegen jeder andere Kugelkreis als Kleinkreis bezeichnet wird.

7. a. Eine die Kugel schneidende Gerade heißt eine Sekante. Da sie zugleich Sekante des Kreises ist, nach dem eine beliebig durch sie gelegte Ebene die Kugel schneidet, so kann eine Gerade die Kugeloberfläche in nicht mehr als zwei Punkten schneiden. — Eine durch den Mittelpunkt gehende Sekante heißt Zentrallinie.

b. Das innerhalb der Kugel fallende Stück einer Sekante heißt Sehne. Aus 6. d folgt, daß der Durchmesser die größte Sehne ist.

8. a. Ein Punkt liegt innerhalb der Kugel oder auf deren Oberfläche oder außerhalb, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkt kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer.

b. Hieraus folgt weiter: Eine Ebene oder eine Gerade schneidet die Kugel oder schneidet sie nicht, je nachdem ihre Entfernung vom Mittelpunkt kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Ebene oder Gerade mit der Kugeloberfläche nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der vom Mittelpunkt auf sie gefällten Senkrechten, (jeder andere Punkt der Ebene oder Geraden liegt außerhalb der Kugel nach I. 12. a). Eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene, und eine solche Gerade — eine Tangente der Kugel. Der gemeinsame Punkt heißt ihr Berührungspunkt, der nach dem Berührungspunkt gezogene Halbmesser — ihr Berührungshalbmesser; der letztere steht senkrecht auf der Berührungsebene oder Tangente im Berührungspunkt. Umgekehrt: eine auf einem Halbmesser der Kugel in dessen Endpunkt senkrecht stehende Ebene oder Gerade berührt die Kugel.

c. Jede Tangente eines Kugelkreises ist auch Tangente an die Kugel; denn da sie in der Ebene des Kugelkreises liegt und mit diesem nur einen Punkt gemein hat, so kann sie auch mit der Kugelfläche nur diesen einen Punkt gemein haben. — Jede in einer Berührungsebene durch den Berührungspunkt gezogene Gerade ist Tangente an die Kugel. Umgekehrt: Haben zwei Tangenten denselben Berührungspunkt, so ist die durch sie gelegte Ebene Berührungsebene (I. 6. a).

d. Aus b folgt: Der geom. Ort einer Ebene oder einer Geraden, die von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

9. a. Ist von einem in der Ebene eines Kreises liegenden Punkt S eine Tangente SA an den Kreis gelegt, und dreht man die Ebene um die Zentrallinie SO, so beschreibt der Kreis eine Kugel, und die Tangente den Mantel eines Kegels, dessen sämtliche Mantellinien die Kugel berühren; sein Grundkreis ist der vom Berührungspunkt A beschriebene Kleinkreis. Der Kegel heißt der vom Punkt S an die Kugel gelegte Berührungskegel, jener Kleinkreis heißt sein Berührungskreis. Man sagt auch, die Kugel sei der Kegelfläche als Berührungskugel einbeschrieben.

b. Aus a folgt: die unendlich vielen Tangenten, die sich von einem Punkt an die Kugel legen lassen, haben — je von dem Punkt bis zum Berührungspunkt gemessen — alle gleiche Länge.

c. Jede Berührungsebene des Kegels berührt auch die Kugel; denn ist SA die Berührungsmantellinie, so hat die Ebene mit der Kugel den Punkt A, aber auch nur diesen gemein. Umgekehrt berührt jede durch den Punkt S an die Kugel gelegte Berührungsebene auch den Kegel.

d. Parallel mit einer geraden Linie lassen sich unendlich viele Tangenten an die Kugel legen; sie bilden die Mantellinien einer Cylinderfläche (Berührungscylinder); denn ihre Berührungspunkte liegen auf einem Großkreis der Kugel, dessen Ebene zu ihnen senkrecht ist (Berührungskreis). Jede Berührungsebene des Cylinders berührt auch die Kugel. Der Berührungscylinder kann als Berührungskegel angesehen werden, dessen Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Unter dem Berührungscylinder einer Kugel im engeren Sinn versteht man einen Cylinder, dessen Mantel und dessen beide Grundkreise die Kugel berühren, dessen Achse also der zu den Mantellinien parallele Kugeldurchmesser ist.

e. Zwei Kugeln berühren sich in einem Punkt, wenn sie in demselben eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen. Da die zwei Berührungshalbmesser auf der Berührungsebene im nämlichen Punkte senkrecht stehen, so liegen die zwei Mittelpunkte und der Berührungspunkt in gerader Linie (I. 7. a). Die Entfernung der Mittelpunkte ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der zwei Halbmesser, je nachdem die eine Kugelfläche die andere von außen oder von innen berührt. Umgekehrt gilt: Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kugeln gleich der Summe oder gleich der Differenz ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kugeln.

10—12: Kugel-Teile.

10. a. Ein Kugelkreis teilt die Kugel (als Körper) in zwei Teile, welche Kugelabschnitte heißen, und die Kugeloberfläche in zwei Teile, welche Kugelkappen oder Kugelhauben heißen. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts besteht also aus einem Kreise, welcher sein Grundkreis heißt, und aus einer Kugelhaube. Das ins Innere des Kugelabschnittes fallende Stück der Achse des Grundkreises heißt die Achse oder die Höhe, ihr Endpunkt — der Pol des Kugelabschnittes oder der Kugelhaube.

b. Ein Großkreis teilt die Kugel in zwei kongruente Hälften, welche Halbkugeln heißen. Jeder Kleinkreis teilt sie in zwei ungleiche Abschnitte (Hauben); der größere enthält den Mittelpunkt der Kugel.

11. a. Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Teil der Kugel oder der Kugeloberfläche heißt eine Kugelzone. Die zwei Kreise heißen die Grundkreise, das zwischen ihre Ebenen fallende Stück ihrer Achse heißt die Achse der Kugelzone. Die Entfernung der zwei Grundkreise heißt die Höhe; sie ist gleich der Achse.

b. Eine Kugelzone kann als Differenz zweier Kugelabschnitte (bezw. Kugelhauben) angesehen werden. Ein Kugelabschnitt kann als Kugelzone aufgefaßt werden, deren einer Grundkreis zu einem Punkt zusammengeschrumpft ist. Die Kugel selbst kann als Kugelzone aufgefaßt werden, deren beide Grundkreise zu Punkten zusammengeschrumpft sind.

12. a. Der Kegel, der einen Kleinkreis der Kugel zum Grundkreis, und den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat, heißt der dem Kleinkreis zugehörige Kegel. Sein Mantel teilt die Kugel in zwei Teile, von denen jeder ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor heißt. Die Oberfläche jedes Kugelausschnittes besteht aus einem Kegelmantel und einer Kugelhaube; der eine (konvexe) Ausschnitt kann als Summe, der andere (konkave) als Differenz eines Kugelabschnittes und eines Kegels angesehen werden.

b. Der erzeugende Winkel des Kegelmantels heißt der erzeugende Zentriwinkel des Kugelausschnittes; ein Kugelausschnitt kann nämlich erzeugt gedacht werden durch Drehung eines Kreisausschnittes um einen der zwei ihn begrenzenden Halbmesser.

c. Die Halbkugel und die Kugel selbst können als Kugelausschnitte aufgefaßt werden, deren erzeugende Winkel bezw. 1R und 2R betragen.

13—22: Sphärik und Vielkant.

13. a. Durch zwei Punkte einer Kugeloberfläche, die nicht Gegenpunkte sind, läßt sich immer ein und nur ein Großkreis legen (I. Einl. 3. a, Schluß).

b. Unter der sphärischen Entfernung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche versteht man die Länge des zwischen ihnen liegenden Großkreisbogens, und zwar desjenigen Bogens, der kleiner als ein Halbkreis ist. Es wird (in B. 11. Zus. 1) bewiesen werden, daß die sphärische Entfernung zweier Punkte den kürzesten Weg vorstellt, auf dem man von einem Punkt zum andern auf der Oberfläche der Kugel gelangen kann. — Die sphärischen Entfernungen können entweder nach irgend einer Längeneinheit (etwa mittels eines Fadens) oder nach Bogengraden (1 Grad = $\frac{1}{360}$ der Großkreis-Peripherie) gemessen werden. Da auf derselben Kugeloberfläche die Bogengrade durchweg gleiche Länge haben, so können auch sie als Einheiten eines Längenmaßstabes gelten.

c. Haben auf einer Kugelfläche zwei Punkte gleiche geradlinige Entfernung wie zwei andere Punkte, so haben sie auch gleiche sphärische Entfernung; und umgekehrt. (Denn die sphärischen Entfernungen sind dann Bögen gleicher Kreise mit gleichen Sehnen.) Einer größeren geradlinigen Entfernung entspricht auch eine größere sphärische Entfernung, und umgekehrt. Dasselbe gilt für zwei gleiche Kugeln.

d. Nach I. 12. b hat ein Pol eines Kugelkreises (II. Einl. 6. c) von allen Punkten der Kreisperipherie gleiche geradlinige, und folglich (nach c) auch gleiche sphärische Entfernungen. Man nennt daher denjenigen Pol eines Kleinkreises, der mit ihm auf der nämlichen Seite des zugehörigen Äquators liegt, den sphärischen Mittelpunkt des Kleinkreises; seine sphär. Entfernung von einem Punkt der Peripherie heißt der sphärische Halbmesser. Auf der Oberfläche einer massiven Kugel kann ein Kugelkreis aus seinem sphärischen Mittelpunkt ganz ebenso mit dem Zirkel beschrieben werden, wie in der Ebene ein Kreis aus seinem Mittelpunkt beschrieben wird.

e. Jeder Pol eines Großkreises hat von allen Punkten desselben eine sphär. Entfernung = 90° oder gleich dem vierten Teil der Großkreis-Peripherie. Der sphär. Halbmesser eines Großkreises ist also = 90°. Jeder seiner Pole kann als sein sphär. Mittelpunkt gelten.

f. Die in a und b genannten zwei Eigenschaften der Großkreise auf der Kugeloberfläche sind dieselben wie die Grundeigenschaften der geraden Linien in der Ebene. Die Großkreise spielen daher auf der Kugeloberfläche die nämliche Rolle wie die geraden Linien in der Ebene. Den Beziehungen zwischen geraden Linien und Kreisen in der Ebene, wie sie die ebene Geometrie betrachtet, entsprechen auf der Kugeloberfläche analoge Beziehungen zwischen Großkreisen und Kleinkreisen. Die Lehre von diesen Beziehungen heißt **Sphärik**.

g. Da es keine parallelen Großkreise giebt, so sind zu den Sätzen der ebenen Geometrie über parallele Gerade **nur teilweise** analoge Sätze in der Sphärik vorhanden.

14. a. Zwei von einem Punkt P (Fig. 26) einer Kugeloberfläche ausgehende Großkreisbögen PQ und PR schließen einen **sphärischen Winkel** QPR ein; der Punkt P heißt die **Spitze** oder der **Scheitel**, die beiden Großkreisbögen PQ und PR heißen die **Schenkel** des Winkels. Ein sphär. Winkel wird **gemessen** durch den Winkel, den die in der Spitze an die beiden Schenkel gelegten Tangenten PT und PU einschließen. Er ist gleich dem Keilwinkel des von den Ebenen der zwei Großkreisbögen gebildeten Keils; denn PT und PU liegen in den Keilblättern und sind senkrecht zur Keilkante OP. Ein sphär. Winkel

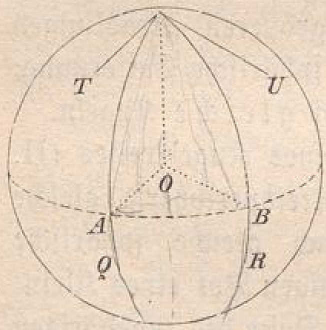


Fig. 26.

kann auch auf der Kugeloberfläche selbst gemessen werden, und zwar durch seinen Äquatorbogen, d. h. durch den zwischen seine Schenkel fallenden Bogen AB des zu der Spitze P gehörigen Äquators; denn der Zentriwinkel AOB dieses Bogens ist = W. TPU (I. 4. b), der Äquatorbogen mißt also ebensoviel Bogengrade als der sphär. Winkel Winkelgrade. — Die Benennungen: Nebenwinkel, Scheitelwinkel u. s. w. haben dieselbe Bedeutung wie bei ebenen Winkeln.

b. Zwei Großkreisbögen stehen auf einander senkrecht, wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Jeder Großkreis PA (Fig. 26), der durch den Pol P eines andern Großkreises AB geht, steht auf diesem senkrecht, und umgekehrt (I. 8. a und c).

15. a. Zwei Großkreise ABA′B′ und ACA′C′ (Fig. 27, S. 61) einer Kugeloberfläche schneiden sich in zwei Gegenpunkten A und A′ und halbieren sich daher gegenseitig, (denn ihre Ebenen haben den Mittelpunkt gemein, schneiden sich also nach einem Durchmesser). Sie teilen die Kugeloberfläche in vier Teile, von denen jeder ein Kugelzweieck oder sphärisches Zweieck heißt. Ein sphär. Zweieck wird also von zwei halben Großkreisen begrenzt. Ihre Schnittpunkte A und A′ heißen die Ecken des Zweiecks. Die sphär. Winkel an den zwei Ecken sind gleich; denn sie haben denselben Äquatorbogen, welcher auch der Äquatorbogen des sphär. Zweiecks heißt. — Die Halbkugel und die ganze Kugeloberfläche können als sphär. Zweiecke aufgefaßt werden, deren Winkel bezw. 2 R und 4 R betragen.

b. Der von den zwei Halbkreis-Ebenen eines sphär. Zweiecks eingeschlossene Keil heißt der dem Zweieck zugehörige Keil. Sein Keilwinkel ist gleich dem sphär. Winkel des Zweiecks (14. a).

c. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln sind kongruent, wenn sie gleiche Winkel oder Äquatorbögen haben (I. 7. Zus. und II. Einl. 5. d).

d. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie ihre Winkel oder Äquatorbögen. Denn verhalten sich die Äquatorbögen wie m zu n, wo m und n zunächst ganze Zahlen sein mögen, und teilt man den Äquatorbogen des einen Zweiecks in m, den des andern in n gleiche Teile, so ist ein Teil des einen Bogens gleich einem Teil des andern Bogens; legt man daher in beiden Zweiecken durch jeden Teilpunkt und die Ecken einen Großkreis, so wird dadurch das eine Zweieck in m, das andere in n Teile geteilt, die (nach c) sämtlich kongruent sind; die zwei Zweiecke verhalten sich somit wie m zu n. Läßt sich das Verhältnis der zwei Äquatorbögen nicht in ganzen Zahlen m und n ausdrücken, so liegt es doch zwischen zwei Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann*).

Ein sphär. Zweieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 2 R (nach a, Schluß).

16. a. Hat man auf einer Kugeloberfläche drei Großkreise, die sich nicht in den nämlichen zwei Gegenpunkten schneiden, so teilen zunächst zwei derselben, z. B. ABA′B′ und ACA′C′ (Fig. 27) die Kugeloberfläche in vier sphär. Zweiecke, von denen dann jedes durch den dritten Kreis BCB′C′ wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser 8 Teile wird ein Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck genannt. Die ein sphär. Dreieck einschließenden Großkreisbögen heißen die Seiten, die sphär. Winkel, die von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten gebildet werden, heißen die Winkel des sphär. Dreiecks.

b. Zwei sphär. Dreiecke, die zusammen ein sphär. Zweieck bilden, heißen Nebendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck

*) Ist z. B. das Verhältnis $= \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, so liegt es zwischen den zwei Grenzen $\frac{1414}{1000}$ und $\frac{1415}{1000}$, oder zwischen $\frac{14142}{10000}$ und $\frac{14143}{10000}$, u. s. f.

sind drei Nebendreiecke vorhanden, oder: jedes sphär. Dreieck läßt sich auf dreifache Art zu einem Zweieck ergänzen. (Die Nebendreiecke von △ ABC sind z. B. BCA′, CAB′ und ABC′.) Zwei solche Dreiecke, deren Ecken paarweise Gegenpunkte sind, heißen Gegendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck ist ein Gegendreieck vorhanden. (Das Gegendreieck von △ ABC ist z. B. A′B′C′.)

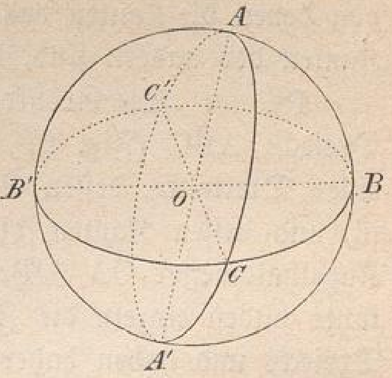


Fig. 27.

c. Die Sphärik beschränkt sich auf die Betrachtung solcher sphär. Dreiecke, in denen jede Seite kleiner als ein halber Großkreis, und jeder Winkel kleiner als 2 R ist. — Ein sphär. Dreieck entsteht daher auch dadurch, daß man drei beliebige, nicht auf demselben Großkreis liegende Punkte der Kugeloberfläche durch ihre sphär. Entfernungen verbindet.

17. a. Hat man drei Ebenen, die nicht der nämlichen Geraden parallel sind, so teilen zunächst zwei derselben den unendlichen Raum in vier Keile, von denen dann jeder durch die dritte Ebene wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser acht Teile wird ein Dreikant genannt. Der Schnittpunkt der drei Ebenen heißt die Spitze, die von der Spitze ausgehenden Äste der drei Schnittlinien heißen die Kanten, die drei Ebenen — die Seitenflächen des Dreikants. Die von je zwei Kanten eingeschlossenen Winkel heißen seine Seiten, die von je zwei Seitenflächen gebildeten Keile — seine Winkel. Wir bezeichnen im folgenden ein Dreikant, dessen Spitze O, dessen Kanten OA, OB, OC sind, durch O,ABC, seine Seiten durch AOB, BOC, COA, seine Winkel durch A, B, C, die numerischen Werte der Winkel durch α, β, γ, die der gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c.

b. Zwei Dreikante, die zusammen einen Keil bilden, heißen Nebendreikante. Zu jedem Dreikant sind drei Nebendreikante vorhanden, die man erhält, wenn man je eine Kante über die Spitze verlängert. Zwei Dreikante, von denen die Kanten des einen die Rückverlängerungen der Kanten des andern sind, heißen Scheiteldreikante.

18. a. Die Großkreis-Ebenen der Seiten eines sphär. Dreiecks ABC (Fig. 27, S. 61) bilden die Seitenflächen eines Dreikants, dessen Spitze der Mittelpunkt O der Kugel ist, und dessen Kanten die nach den drei Ecken gezogenen Kugelhalbmesser OA, OB, OC sind. Die Seiten des Dreikants bilden einzeln die Zentriwinkel der Seiten des sphär. Dreiecks und haben daher ebensoviel Winkelgrade, als die entsprechenden Dreieckseiten Bogengrade haben. Die Winkel des Dreikants sind einzeln gleich den Winkeln des sphär. Dreiecks (14. a). Das Dreikant heißt das dem sphär. Dreieck zugehörige Dreikant.

b. Beschreibt man umgekehrt aus der Spitze eines Dreikants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet das Dreikant aus dieser das zugehörige sphär. Dreieck aus. Da der Halbmesser der Kugel beliebig ist, so giebt es zu einem Dreikant unendlich viele zugehörige sphär. Dreiecke; zwei entsprechende Seiten zweier solcher Dreiecke haben zwar verschiedene absolute Längen, nach Bogengraden gemessen aber haben sie gleiche numerische Werte.

c. Jeder Lehrsatz über die Seiten und Winkel der sphär. Dreiecke gilt eben damit auch für Dreikante, und umgekehrt.

19. a. Die Summe der drei Winkel hat für verschiedene sphär. Dreiecke verschiedene Werte, sie ist stets größer als 2 R. Z. B. ist in dem sphär. Dreieck PAB in Fig. 26 (S. 58) die Summe der Winkel gleich 2 R plus dem W. APB, der zwischen 0 und 2 R liegen kann. (Der allgemeine Beweis wird in B. 15. a erbracht werden.) Man nennt den Ueberschuß der Winkelsumme eines sphär. Dreiecks über 2 R den sphärischen Exzeß des Dreiecks. Dieselbe Bezeichnung wird auch auf Dreikante übertragen.

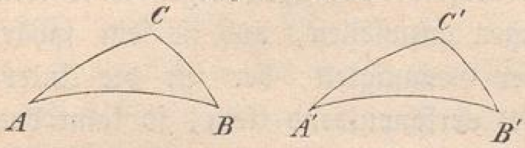
b. Je kleiner die Dimensionen eines sphär. Dreiecks im Verhältnis zum Halbmesser seiner Kugel sind, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß; denn desto weniger weicht das sphär. Dreieck von dem durch seine Endpunkte bestimmten ebenen Dreieck ab. Sind über ein auf einer Kugeloberfläche von großem Halbmesser (z. B. auf der Erdkugel) liegendes Dreieck geometrische Untersuchungen anzustellen, und ist sein sphär. Exzeß für den Grad der Genauigkeit, der für die Untersuchung vorgeschrieben ist, verschwindend klein, so kann das Dreieck als ebenes Dreieck behandelt werden. Ist dies aber nicht der Fall, so muß zu der Untersuchung statt der ebenen Geometrie die Sphärik angewendet werden.

c. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant, das einen rechten Winkel besitzt, heißt rechtwinklig. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant kann übrigens auch mehr als einen rechten Winkel enthalten (vgl. z. B. $\triangle$ PAB in Fig. 26, S. 58). Ebenso können mehrere stumpfe Winkel vorhanden sein. — Ein sphär. Dreieck oder Dreikant mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig, ein solches mit drei gleichen Seiten heißt gleichseitig. — Drei größte Kreise, die auf einander senkrecht stehen, teilen die Kugeloberfläche in acht kongruente Teile, von denen jeder ein Kugeloktant heißt; das zugehörige Dreikant heißt Oktant. In ihm sind alle Seiten und alle Winkel = 90°.

20. a. Zwei sphär. Dreiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln, und ebenso zwei Dreikante heißen entsprechend-gleich, wenn sie alle Winkel und alle entsprechenden Seiten bezw. gleich haben.

b. Umläuft man auf der Oberfläche einer Kugel zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke ABC und A'B'C', indem man ihre entsprechenden Ecken und Seiten in der nämlichen Reihenfolge passiert, und hat man dabei das umlaufene Dreieck beidemal zur Linken oder beidemal zur Rechten (Fig. 28. a), so sagt man, die entsprechenden Elemente folgen sich in gleichem Sinn, oder: die zwei Dreiecke seien gleichstimmig. Hat man dagegen das eine Dreieck zur Linken, das andere zur Rechten (Fig. 28. b), so folgen sich die entsprechenden Elemente *in entgegengesetztem Sinn*, die zwei Dreiecke sind *ungleichstimmig*. Im ersten Fall können die Dreiecke und ihre zugehörigen Dreikante zur

Fig. 28. a.



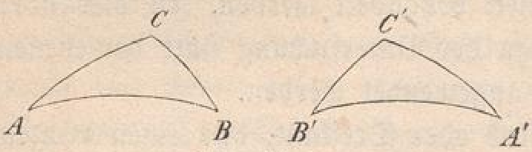


Fig. 28. b.

Deckung gebracht werden und heißen daher *kongruent*. Im zweiten Fall können sie nicht zur Deckung gebracht werden. Verschiebt man nämlich das eine Dreieck auf der Kugeloberfläche, bis zwei seiner Ecken, z. B. A und B mit den entsprechenden Ecken A′ und B′ des andern Dreiecks — und also die zwei Kanten OA und OB des einen zugehörigen Dreikants mit den entsprechenden Kanten OA′ und OB′ des andern zusammenfallen: so liegt jetzt das dritte Kantenpaar OC und OC′ (nach I. Anh. 15. b u. c) symmetrisch in Bez. auf die gemeinschaftliche Seitenfläche AOB. Zwei solche sphär. Dreiecke oder Dreikante heißen *symmetrisch* *). — Um bei entsprechend-gleichen *Dreikanten* zu entscheiden, ob sie gleichstimmig oder ungleichstimmig sind, ohne hiezu die zugehörigen sphär. Dreiecke zu Hilfe zu nehmen, kann man sich zwei menschliche Figuren mit den zwei Dreikanten als Mänteln bekleidet den-

*) Derselbe Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Dreiecken findet wie in der Sphärik, so auch in der ebenen Geometrie statt. Zwei symmetrische ebene Dreiecke können durch bloßes Verschieben in ihrer Ebene nicht zur Deckung gebracht werden, sondern nur dadurch, daß man das eine Dreieck umlegt, so daß es seine vorherige Unterseite nach oben kehrt. Versucht man dasselbe bei zwei symmetrischen sphärischen Dreiecken auszuführen, indem man sie von der Kugeloberfläche abhebt und so legt, daß die Ecken des einen mit den entsprechenden Ecken des andern zusammenfallen: so sind jetzt die konkaven Seiten der zwei Dreiecke einander zugekehrt (ähnlich wie wenn die rechte und die linke hohle Hand so gegen einander gelegt werden, daß je zwei entsprechende Fingerspitzen sich berühren); von einer Deckung kann also keine Rede sein.

ken (den Hals in der Spitze), und sehen, ob für beide Figuren die entsprechenden Kanten (Falten) ihrer Mäntel in demselben Sinne auf einander folgen, oder für die eine Figur von der Rechten über die Brust zur Linken, für die andere von der Linken über die Brust zur Rechten.

c. Zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke oder Dreikante müssen entweder kongruent oder symmetrisch sein. Bloß in dem Falle, wo sie gleichschenklig sind, und in jedem den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, sind sie sowohl kongruent als symmetrisch, denn es können dann die gleichen Elemente sowohl so, daß sie sich in gleichem Sinne —, als so, daß sie sich in entgegengesetztem Sinne folgen, einander zugeordnet werden.

d. Zwei sphär. Gegendreiecke oder zwei Scheiteldreikante sind entsprechend-gleich, (denn je zwei entsprechende Seiten oder Winkel sind als Scheitelwinkel gleich, I. 7. Zus.); und zwar sind sie — abgesehen von dem in c besprochenen Fall — immer entgegengesetzten Sinnes, also symmetrisch.

21. a. Konstruiert man zu den drei Seiten eines sphär. Dreiecks (d. h. zu den Großkreisen, von denen die Seiten Bögen sind) die Pole, und zwar zunächst zu jeder Seite nur denjenigen Pol, welcher auf derselben Halbkugel mit dem Dreieck liegt: so bestimmen diese drei Pole die Ecken eines zweiten sphär. Dreiecks, welches das Polardreieck oder Supplementardreieck des ersten heißt. Jeder Seite des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck ein ihr zugehöriger Winkel, nämlich derjenige, dessen Spitze der Pol der Seite ist; und jedem Winkel des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck eine ihm zugehörige Seite, nämlich diejenige, deren Endpunkte die Pole der jenen Winkel einschließenden Seiten sind. — Die entgegengesetzten Pole der Dreieckseiten bestimmen ein zweites Polardreieck, welches das Gegendreieck des ersten, und also ihm entsprechend-gleich ist. Das erste Polardreieck heißt mit dem ursprünglichen Dreieck gleichstimmig, das zweite — ungleichstimmig.

b. Entsprechend erhält man das Polardreikant oder Supplementardreikant eines Dreikants, wenn man auf dessen drei Seitenflächen in der Spitze die Senkrechten errichtet, und zwar entweder alle drei Senkrechten auf derjenigen Seite der betreffenden Seitenfläche, auf der das Dreikant liegt, oder alle drei auf der entgegengesetzten Seite. Was zugehörige Winkel und Seiten des Dreikants und seines Polardreikants sind, ergiebt sich ähnlich wie beim sphär. Dreieck.

22. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks von einem außerhalb seiner Ebene liegenden Punkt Gerade, und legt durch je zwei auf einander folgende Gerade eine Ebene, so umschließen diese Ebenen einen (nicht allseitig begrenzten) Raum, welcher Vielkant (auch körperlicher Winkel oder körperliche Ecke) heißt. Hat das Vielkant n Kanten und also auch n Seitenflächen, so heißt es n-kant. — Beschreibt man aus der Spitze des Vielkants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet es aus dieser ein sphärisches Vieleck (n-eck) aus, das dem Vielkant zugehörig heißt. Seiten und Winkel des Vielkants und des sphär. Vielecks haben die nämliche Bedeutung wie beim Dreikant und sphär. Dreieck. Erhabene Winkel sind ausgeschlossen. — Ein Vielkant oder ein sphär. Vieleck heißt regulär, wenn alle seine Seiten gleich und alle seine Winkel gleich sind.

b. Die Ebenen, die durch je zwei nicht auf einander folgende Kanten eines Vielkants gelegt werden können, heißen Diagonalebenen. Sie schneiden die Fläche des zugehörigen sphär. Vielecks nach dessen Diagonalen. Jedes n-kant (sphär. n-eck) kann durch Diagonalebenen (Diagonalen) in n—2 Dreikante (sphär. Dreiecke) zerlegt werden.

c. Da die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks größer als 2 R ist (19. a), so ist die Summe der Winkel eines sphär. n-ecks (nach b, Schluß) größer als $(n-2)\,2\,R$, d. h. größer als die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl. Der Ueberschuß über die letztere heißt der sphärische Exzeß des sphär. Vielecks. Sind also α, β, γ ... die Winkel des sphär. n-ecks, so ist sein sphär. Exzeß $= \alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2)\,2\,R$. Die Bezeichnung „sphär. Exzeß" wird auch auf Vielkante übertragen.

d. Zwei Vielkante oder zwei sphär. Vielecke gleicher Kugeln heißen entsprechend-gleich, wenn sie in derselben Reihenfolge alle Winkel und alle entsprechenden Seiten einzeln gleich haben. Je nachdem sich dabei die entsprechenden Elemente in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne folgen (vgl. 20. b), können die zwei Vielkante oder Vielecke zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent, oder können sie nicht zur Deckung, wohl aber in symmetrische Lage gebracht werden und heißen symmetrisch.

B. Lehrsätze.

1—4: Kugelkreise.

Lehrsatz 1.

a. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf die Ebene eines Kleinkreises gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Kleinkreises.

b. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Kleinkreises steht auf der Ebene des Kleinkreises senkrecht.

c. Die auf der Ebene eines Kleinkreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. **a** folgt unmittelbar aus Einl. II. 6. c. — Beweise von **b** und **c** indirekt.

Zusatz 1. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf eine Sehne gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt der Sehne. Die Verbindungslinie des Mittelpunkts einer Kugel mit dem Mittelpunkt einer Sehne steht auf der Sehne senkrecht. Die Mittellotebene (I. Anh. 18. a) einer Sehne geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Zusatz 2. Dieselben Sätze gelten auch für eine Berührungsebene oder eine Tangente der Kugel, wenn statt „Mittelpunkt des Kleinkreises", bezw. „der Sehne" gesetzt wird: „Berührungspunkt der Berührungsebene", bezw. „der Tangente".

Lehrsatz 2.

Schneiden sich zwei Kugelflächen, so schneiden sie sich nach einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Zentrallinie liegt, und dessen Ebene zur Zentrallinie senkrecht ist.

Beweis. Sind O und O′ die Mittelpunkte der zwei Kugeln, und ist A ein beliebiger Punkt der Schnittkurve, so sind, wie auch der Punkt A auf der Schnittkurve angenommen werden mag, die Dreiecke OAO′ alle unter sich kongruent; daher haben die von den Punkten A auf OO′ gefällten Höhen alle den nämlichen Fußpunkt M und die gleiche Länge. Die Punkte A liegen somit alle auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt M ist, und dessen Ebene senkrecht zu OO′ ist (I. 6. b).

Lehrsatz 3.

a. Gleiche Kugelkreise derselben Kugel sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt, und umgekehrt.

b. Von zwei ungleichen Kugelkreisen ist der größere dem Mittelpunkt näher, und umgekehrt.

Beweis. Es sei O der Mittelpunkt der Kugel, M und M′ seien die Mittelpunkte zweier Kugelkreise, also OM und OM′ die Entfernungen ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt (II. 1. b). MA und M′A′ seien beliebige Halbmesser der zwei Kugelkreise; man ziehe OA und OA′.

a. Sind die zwei Kugelkreise gleich, so ist $MA = M'A'$; da außerdem $OA = OA'$, so ist $\triangle OMA \cong OM'A'$, folglich: $OM = OM'$. — Ist umgekehrt $OM = OM'$, so ist gleichfalls $\triangle OMA \cong OM'A'$, folglich $MA = M'A'$, d. h.: die Kugelkreise sind gleich.

b. In den zwei rechtw. Dreiecken OMA und OM′A′ sind die Hypotenusen OA und OA′ gleich. Haben aber zwei rechtw. Dreiecke gleiche Hypotenusen, und ist die erste Kathete des einen größer als die erste Kathete des andern, so ist die zweite Kathete des einen kleiner als die zweite Kathete des andern. Ist daher Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′, also Kath. $MA > M'A'$, so ist Kath. $OM < OM'$. Ist umgekehrt $OM < OM'$, so ist $MA > M'A'$, d. h.: Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′.

Zusatz 1. Dieselben Sätze gelten auch für Kugelsehnen.

Zusatz 2. Verlängert man OM und OM′, bis sie die Kugeloberfläche schneiden in P und P′, und vergleicht die zwei Dreiecke PMA und P′M′A′, so erhält man (gemäß II. Einl. 13. c und d) die Sätze: Haben zwei Kugelkreise derselben Kugel gleiche ebene Halbmesser, so haben sie auch gleiche sphärische Halbmesser; und umgekehrt. Sind die ebenen Halbmesser ungleich, so hat der Kreis mit dem größeren ebenen Halbmesser auch einen größeren sphärischen Halbmesser; und umgekehrt.

Anm. Sämtliche Sätze gelten auch für zwei gleiche Kugeln.

Lehrsatz 4.

a. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von drei Punkten eines Kugelkreises gleiche sphärische Entfernungen, so ist er Pol des Kugelkreises.

b. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von zwei Punkten eines Großkreises, die nicht Gegenpunkte sind, sphär. Entfernungen von je 90 Graden, so ist er Pol des Großkreises.

Beweis. a. Ist P der Punkt auf der Kugeloberfläche, und sind A, B, C die drei Punkte des Kugelkreises, so ist Strecke PA = PB = PC (II. Einl. 13. c). Fällt man daher von P auf die Ebene des Kugelkreises die Senkrechte PM, so ist: MA = MB = MC (I. 12. b mit Zus. 1); folglich ist M Mittelpunkt des Kreises ABC, und somit (nach II. 1. c u. II. Einl. 6. c) P einer seiner zwei Pole.

b. Ist P (vgl. Fig. 26, S. 58) der Punkt auf der Kugeloberfläche, O der Mittelpunkt der Kugel, und sind A, B die zwei Punkte des Großkreises, so ziehe man OP, OA, OB; da nun die Großkreisbögen PA und PB je 90 Grade betragen, so sind die Zentriwinkel POA und POB je = R; folglich steht (da A, O, B nicht in gerader Linie liegen) PO senkrecht auf der Ebene des Großkreises in dessen Mittelpunkt (I. 6. a); somit ist P einer seiner zwei Pole (II. Einl. 6. c).

5—17: **Sphärisches Dreieck und Dreikant.**

Lehrsatz 5.

a. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck eines zweiten, so ist auch das zweite Dreieck Polardreieck des ersten. — Ist ein Dreikant Polardreikant eines zweiten, so ist auch das zweite Dreikant Polardreikant des ersten.

b. Die Bogengrade der Seiten eines sphär. Dreiecks supplementieren die Winkelgrade der zugehörigen Winkel seines Polardreiecks, und die Winkelgrade der Winkel des sphär. Dreiecks supplementieren die Bogengrade der zugehörigen Seiten des Polardreiecks. — Die Seiten und Winkel eines Dreikants supplementieren bezw. die zugehörigen Winkel und Seiten seines Polardreikants.

Erster Beweis. a. Es sei ABC (Fig. 29) ein sphär. Dreieck, abc sein Polardreieck, und zwar das mit ihm gleichstimmige (II. Einl. 21. a), a Pol von BC, b von CA, c von AB. Man ziehe die Großkreisbögen Ab und Ac. Da nun b Pol von AC ist, so ist Bogen bA = 90°, und da c Pol von AB ist, so ist Bogen cA = 90°; Punkt A hat also von b und von c sphär. Entfernungen von je 90 Graden, ist folglich Pol von bc (II. 4. b). Ebenso zeigt man, daß B Pol von ca, C Pol von ab ist. Nun liegt jeder der Pole A, B, C mit △ abc auf der nämlichen Halbkugel. Folglich ist △ ABC Polardreieck von △ abc, und zwar das mit ihm gleichstimmige.

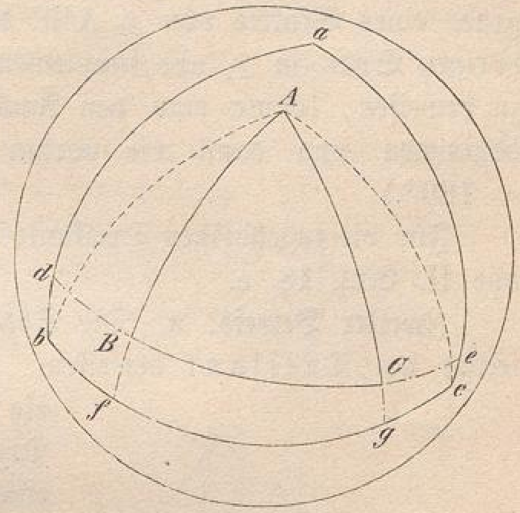


Fig. 29.

Für die zugehörigen Dreikante O, ABC und O, abc ergiebt sich sodann der Beweis unmittelbar durch die Bemerkung, daß zu jedem Bogen von 90° ein Zentriwinkel gleich einem Rechten gehört.

b. Zur Seite BC des Dreiecks ABC gehört der Winkel a des Polardreiecks abc. Um diesen Winkel mit dem Bogen BC vergleichen zu können, benütze man seinen Äquatorbogen (II. Einl. 14. a). Da BC der Äquator von a ist, so ist, wenn BC von ab in d, von ac in e geschnitten wird, de der Äquatorbogen von W. a; man hat also zu beweisen, daß Bogen de + BC = 180° ist. Nun betragen die Bögen Be und Cd je 90° (nach a), folglich ist Be + Cd = 180°;

aber: Be + Cd = BC + Ce + dB + BC = de + BC; somit auch: de + BC = 180°. Damit ist bewiesen, daß die Bogengrade einer Seite des sphär. Dreiecks ABC die Winkelgrade des zugehörigen Winkels im Polardreieck abc supplementieren. Da aber (nach a) umgekehrt △ ABC Polardreieck von △ abc ist, so ist eben damit auch bewiesen, daß die Winkelgrade eines Winkels von △ ABC die Bogengrade der zugehörigen Seite in △ abc supplementieren. (Um dies direkt zu beweisen, könnte man den Äquatorbogen fg von W. A bestimmen und dann wie vorhin zeigen, daß bc + fg = 180°.)

Für die zugehörigen Dreikante folgt sodann der Beweis aus II. Einl. 18. c.

Zweiter Beweis. a. Die Sätze lassen sich auch unmittelbar am Dreikant beweisen. Ist nämlich O (Fig. 30) die Spitze des ursprünglichen Dreikants, und fällt man von einem in seinem Innern liegenden Punkt o auf seine Seitenflächen die Senkrechten oa, ob, oc, so sind diese (nach I. 10. b) parallel und gleichgerichtet mit den Kanten desjenigen Polardreikants,

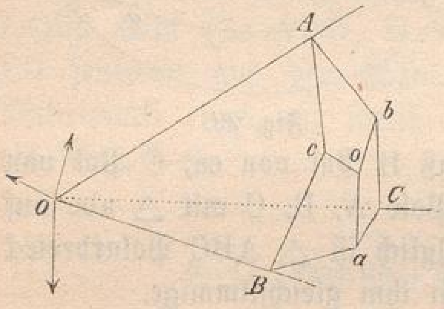


Fig. 30.

das mit Dreikant O ungleichstimmig ist. Hieraus folgt, daß das von den drei Senkrechten gebildete Dreikant mit jenem Polardreikant kongruent ist; denn es hat mit ihm (nach I. 4. b) die Seiten, und (nach I. 4. a u. I. Anh. 7) die Winkel gleichstimmig gleich. — Werden die Kanten des ursprünglichen Dreikants O von den Seitenflächen des Dreikants o in den Punkten A, B, C geschnitten, so schneiden sich die beiderlei Seitenflächen nach den Geraden aB, Bc, cA, Ab, bC, Ca, und es entsteht ein von sechs Vierecken begrenzter Körper. Nun ist z. B. Fläche aoc senkrecht auf Fläche BOC, weil sie durch oa geht, und senkrecht auf Fläche AOB, weil sie durch oc geht (I. 8. a), folglich auch senkrecht auf deren Schnittlinie OB (I. 8. d). Daher ist auch die mit aoc parallele Seitenfläche des eigentlichen Polardreikants senkrecht auf OB (I. 11. b), u. s. w.

b. In jedem der sechs Vierecke sind zwei gegenüberliegende Winkel Rechte, folglich supplementieren sich die zwei andern Winkel; von diesen stellt aber immer der eine eine Seite des einen Dreikants, der andere den zugehörigen Winkel des andern Dreikants vor.

Anm. Aus Lehrs. b erklären sich die Namen „Supplementardreieck, Supplementardreikant".

Zusatz 1. Nach a können zu einem sphär. Dreieck die Polardreiecke auch dadurch konstruiert werden, daß man zu jeder Ecke den Äquator konstruiert; und zu einem Dreikant die Polardreikante dadurch, daß man senkrecht zu jeder Kante eine Ebene durch die Spitze legt.

Zusatz 2. Aus b folgt: Haben auf gleichen Kugeloberflächen zwei sphär. Dreiecke — oder haben zwei Dreikante die Seiten bezw. gleich, so haben ihre Polardreiecke oder Polardreikante die Winkel bezw. gleich; und umgekehrt. Hieraus folgt weiter: Sind zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante entsprechend-gleich, so sind auch ihre Polardreiecke oder Polardreikante entsprechend-gleich.

Lehrsatz 6.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen bezw. gleich sind zweien Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel im andern.

Beweis. Die zwei Dreikante seien $\triangle$ und $\triangle'$ oder O, ABC und O', A'B'C'; es sei Winkel A = A', Seite AOB = A'O'B', Seite AOC = A'O'C'.

Folgen sich die gleichen Elemente in gleichem Sinne, so können $\triangle$ und $\triangle'$ zur Deckung gebracht werden. Bringt man nämlich Keil A' mit A zur Deckung so, daß Punkt O' mit O zusammenfällt, so müssen in den beiden Keilblättern (wegen der Gleichheit der betr. Dreikantseiten) auch OB' mit OB, und OC' mit OC zusammenfallen. Die zwei Dreikante sind somit kongruent. — Folgen sich die gleichen Elemente in entgegengesetztem Sinne, so konstruiere man zu $\triangle'$ dessen Scheiteldreikant $\triangle''$. Nun ist $\triangle''$ mit $\triangle'$ entsprechend-gleich, und zwar entgegengesetzten Sinnes (II. Einl. 20. d). Daher folgen sich in $\triangle''$ und $\triangle$ die gleichen Elemente wieder in gleichem Sinne; also ist $\triangle$ entsprechend-gleich $\triangle''$ (1. Teil des Bew.), und somit auch entsprechend-gleich $\triangle'$.

Ist der Satz für Dreikante bewiesen, so gilt er auch für sphär. Dreiecke gleicher Kugeln (II. Einl. 18. c).*)

Lehrsatz 7.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn eine Seite und die zwei ihr anliegenden Winkel im einen bezw. gleich sind einer Seite und den zwei ihr anliegenden Winkeln im andern.

Beweis. Konstruiert man zu den zwei Dreikanten die Polardreikante, so haben diese einen Winkel und die ihn einschließenden Seiten bezw. gleich (II. 5. b), und sind daher entsprechend-gleich (II. 6). Dann aber müssen auch die ursprünglichen Dreikante entsprechend-gleich sein (II. 5. Zus. 2).

Lehrsatz 8.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn

*) Dieselbe Bemerkung gilt für jeden der folgenden Beweise zu Lehrs. 7 bis 12.

die drei Seiten des einen bezw. gleich sind den drei Seiten des andern.

Beweis. Die Dreikante seien O, ABC und O′, A′B′C′ (Fig. 31). Man schneide von den 6 Kanten gleiche Stücke ab: OA = OB = OC = O′A′ = O′B′ = O′C′, und verbinde ihre Endpunkte. Dann sind die Dreiecke OAB, OBC, OCA bezw. kongruent den Dreiecken O′A′B′, O′B′C′, O′C′A′; daher ist AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′, folglich △ ABC ≌ A′B′C′. Weiter folgt aus den genannten Kongruenzen, daß die in A zusammenstoßenden drei Dreieckswinkel einzeln gleich sind den entsprechenden in A′ zusammenstoßenden Dreieckswinkeln. Man schneide nun auf den Kanten OA und O′A′ gleiche Stücke OD = O′D′ ab und lege senkrecht zu OA und O′A′

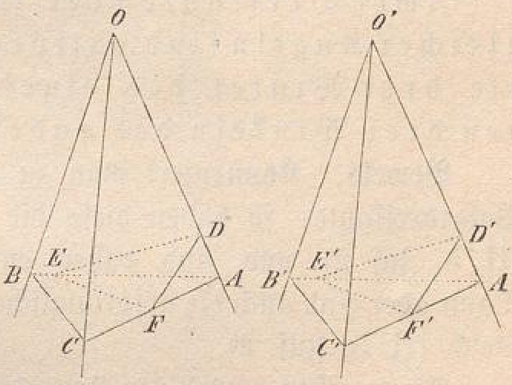


Fig. 31.

durch D und D′ Ebenen, welche die in A und A′ zusammenstoßenden Dreiecke nach DE, DF, EF, bezw. D′E′, D′F′, E′F′ schneiden. Dann stellen W. EDF und E′D′F′ die Keilwinkel an den Kanten OA und O′A′ vor, und es kann leicht bewiesen werden, daß diese zwei Winkel gleich sind. Es ergiebt sich nämlich zunächst: △ ADE ≌ A′D′E′ und △ ADF ≌ A′D′F′, daher AE = A′E′, DE = D′E′, AF = A′F′, DF = D′F′. Hieraus folgt weiter: △ EAF ≌ E′A′F′, EF = E′F′, und daher schließlich: △ EDF ≌ E′D′F′, W. EDF = E′D′F′. Die zwei Dreikante haben also auch zwei entsprechende Winkel gleich und sind folglich entsprechend-gleich (nach II. 6).

Anm. Der obige Beweis ist für alle Fälle giltig, mögen die Seiten spitz oder stumpf oder Rechte sein. — Übrigens kann der Beweis auch ohne Hinzuziehung der Dreiecke ABC und A′B′C′ geführt werden. Schneiden nämlich die durch D und D′ senkrecht zu OA und

O'A' gelegten Ebenen die Kanten OB und OC, O'B' und O'C' in G und H, G' und H': so ist $\triangle$ ODG $\cong$ O'D'G', $\triangle$ ODH $\cong$ O'D'H'. Hieraus folgt: $\triangle$ OGH $\cong$ O'G'H', und weiter: $\triangle$ GDH $\cong$ G'D'H', W. GDH = G'D'H'. Dieser Beweis ist jedoch nur dann direkt anwendbar, wenn in den Dreikanten zwei Paare gleicher Seiten spitz sind. Trifft dies nicht zu, so ist mindestens ein Paar Nebendreikante vorhanden, in denen es zutrifft; sind aber diese entsprechend-gleich, so sind es auch die ursprünglichen Dreikante.

Lehrsatz 9.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn die drei Winkel des einen bezw. gleich sind den drei Winkeln des andern.

Beweis. Konstruiert man zu den zwei Dreikanten die Polardreikante, so haben diese die drei Seiten bezw. gleich (II. 5. Zus. 2) und sind daher entsprechend-gleich (II. 8). Dann aber sind auch die ursprünglichen Dreikante entsprechend-gleich (II. 5. Zus. 2).

Anm. Man bemerke den Unterschied zwischen den Sätzen II. 6, 7, 8, 9 und den Lehrsätzen über die Kongruenz ebener Dreiecke. Die vier Sätze lassen sich auch so aussprechen: Ein Dreikant oder sphär. Dreieck ist eindeutig bestimmt aus drei Seiten, aus drei Winkeln, u. s. w. Allgemein läßt sich der Satz aussprechen: Ein Dreikant oder ein sphär. Dreieck ist (ebenso wie ein ebenes Dreieck) bestimmt aus drei von einander unabhängigen Elementen. Der Unterschied zwischen den obigen vier Sätzen und den Lehrsätzen über die Kongruenz ebener Dreiecke rührt nun daher, daß bei ebenen Dreiecken die drei Winkel von einander abhängig sind, was bei sphär. Dreiecken nicht der Fall ist (II. Einl. 19. a). — Aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel einer derselben ist ein sphär. Dreieck (ebenso wie ein ebenes) im allgemeinen nicht eindeutig, sondern zweideutig bestimmt, und daher sind zwei Dreikante oder sphär. Dreiecke, die drei solche Elemente bezw. gleich haben, nicht notwendig entsprechend-gleich. Dieselbe Bewandtnis hat es mit zwei Dreikanten oder sphär. Dreiecken, die zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben. (Siehe hierüber II. Anh. 30. a und b.) — Aehnliche Dreikante oder sphär. Dreiecke auf derselben Kugel giebt es nicht; doch stellen zwei sphär. Dreiecke, die demselben Dreikant, aber zweien ungleichen Kugeln angehören (II. Einl. 18. b), ähnliche Gebilde vor.

Lehrsatz 10.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck liegen

a. gleichen Winkeln gleiche Seiten —

b. gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. **a.** In dem Dreikant O, ABC (Fig. 32) sei W. B = C. Man konstruiere sein Scheiteldreikant O, A′B′C′; dann läßt sich beweisen, daß dieses mit O, ABC in der Art entsprechend-gleich ist, daß Kante OB′ mit OC und Kante OC′ mit OB entsprechend ist. Es ist nämlich W. B′ = B = C = C′ (I. 7. Zus.); in den zwei Dreikanten O, ABC und O, A′C′B′ ist also S. BOC = C′OB′, W. B = C′, W. C = B′; folglich sind sie in dem angegebenen Sinne entsprechend-gleich (II. 7), daher ist S. AOB = A′OC′ = AOC.

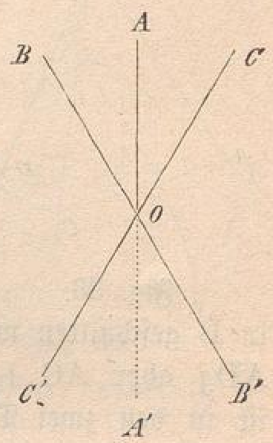


Fig. 32.

b. Es sei S. AOB = AOC; konstruiert man wieder das Scheiteldreikant O, A′B′C′, so ist S. A′OB′ = AOB = AOC = A′OC′; also ist in den zwei Dreikanten O, ABC und O, A′C′B′, wenn sie in dem nämlichen Sinne wie oben auf einander bezogen werden, W. A = A′, S. AOB = A′OC′, S. AOC = A′OB′; folglich sind sie entsprechend-gleich (II. 6), daher ist W. B = C′ = C.

(Anderer Beweis durch I. Anh. 12. b.)

Zusatz 1. Satz b wird auch so ausgesprochen: Im gleichschenkligen sphär. Dreieck (Dreikant) sind die Winkel an der Grundlinie (Grundfläche) gleich.

Zusatz 2. Im gleichseitigen sphär. Dreieck oder Dreikant sind alle Winkel gleich, und: sind in einem sphär. Dreieck oder Dreikant die drei Winkel gleich, so ist es gleichseitig.

Lehrsatz 11.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

Beweis. Das Dreikant sei O, ABC (Fig. 33); AOB sei seine größte Seite; es ist dann bloß zu beweisen, daß AOC + BOC > AOB. Man lege in der Ebene AOB an OA in O den Winkel AOD = AOC an; dann muß OD innerhalb des W. AOB fallen. Schneidet man die Strecken OC = OD beliebig ab und legt durch die Punkte C und D beliebig eine Ebene, welche von OA in A, von OB in B geschnitten wird, so ist △ AOC ≅ AOD, also AC = AD; aber AC + BC > AB; folglich BC > BD. Nun ist in den zwei Dreiecken BOC und BOD: S. OB = OB, S. OC = OD, S. BC > BD, daher: W. BOC > BOD; addiert man hiezu: AOC = AOD, so folgt: AOC + BOC > AOB.

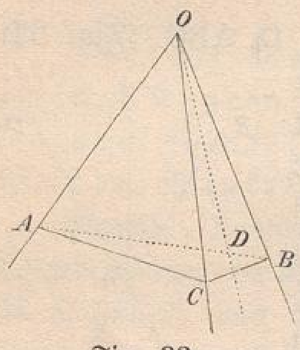


Fig. 33.

Zusatz 1. Aus dem Satze folgt: In einem sphär. Vieleck ist eine Seite kleiner als die Summe der übrigen Seiten. — Hieraus folgt weiter: Auf der Oberfläche einer Kugel ist die sphär. Entfernung zweier Punkte der kürzeste Weg, auf dem man von einem Punkt zum andern gelangen kann. Denn jeder andere Weg kann als polygonaler Zug (eventuell von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten) aufgefaßt werden.

Zusatz 2. Wendet man Lehrs. 11 auf die drei Seiten $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ des Polardreikants an, so ergiebt sich der Satz: In einem Dreikant oder sphär. Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um 2 R vermehrte dritte.

Lehrsatz 12.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck liegt

a. dem größeren Winkel die größere Seite —

b. der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis. **a.** In dem Dreikant O, ABC (Fig. 34) sei W. C > B. Dann ist zu beweisen, daß S. AOB > AOC. Legt man durch die Kante OC eine Ebene, die mit der Seitenfläche COB einen Winkel = B macht, so muß diese Ebene innerhalb des W. C — und folglich ihre Schnittlinie OD mit der Seitenfläche AOB zwischen OA und OB fallen. In dem Dreikant O, BCD ist nun S. DOB = DOC (II. 10. a); ferner ist in dem Dreikant O, ACD:

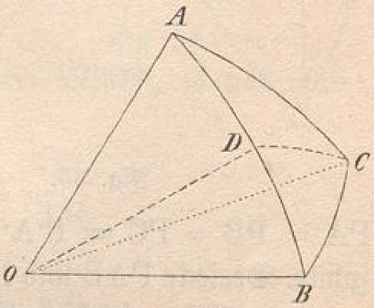


Fig. 34.

AOC < AOD + DOC (II. 11),

also auch: AOC < AOD + DOB

oder: AOC < AOB.

b. Es sei S. AOB > AOC. Wäre W. C nicht größer als B, so wäre entweder C = B oder C < B. Im ersten Falle müßte S. AOB = AOC sein (II. 10. a); im zweiten Falle müßte AOB < AOC sein (nach a). Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muß W. C > B sein.

(Anderer Beweis durch I. Anh. 12. c.)

Lehrsatz 13.

Zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis. Für kongruente Dreiecke ist der Satz selbstverständlich. Für symmetrische Dreiecke beweist er sich folgendermaßen:

Die Dreiecke seien ABC und A′B′C′ (Fig. 35); dann ist Sehne AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′ (II. Einl. 13. c); folglich sind die ebenen Dreiecke ABC und A′B′C′ kongruent, und die Schnittkreise ihrer Ebenen mit der Kugeloberfläche gleich (denn kongruente Dreiecke haben gleiche umbeschriebene Kreise). Sind also P und P′ die sphär. Mittelpunkte dieser zwei Kreise, so ist (gemäß II. 3. Zus. 2): Bogen PA = PB = PC = P′A′ = P′B′ = P′C′. Hiernach sind die sphär. Dreiecke PAB und P′A′B′ entsprechend-gleich (II. 8), und zwar, weil sie gleichschenklig sind, kongruent (II. Einl. 20. c), folglich auch flächengleich. Dasselbe gilt von den Dreiecken PBC und P′B′C′, PCA und P′C′A′. Liegen daher die Punkte P und P′ innerhalb der Dreiecke ABC und A′B′C′, so ist △ ABC = PAB + PBC + PCA = P′A′B′ + P′B′C′ + P′C′A′ = △ A′B′C′. Liegt aber einer jener Punkte außerhalb seines Dreiecks, so muß auch der andere eine entsprechende Lage außerhalb seines Dreiecks haben; (liegt z. B. P außerhalb so, daß W. BPC = BPA + APC ist, so muß wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkel auch B′P′C′ = B′P′A′ + A′P′C′ sein;) die zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ sind also dann Differenzen gleicher Flächenräume, folglich ebenfalls flächengleich.

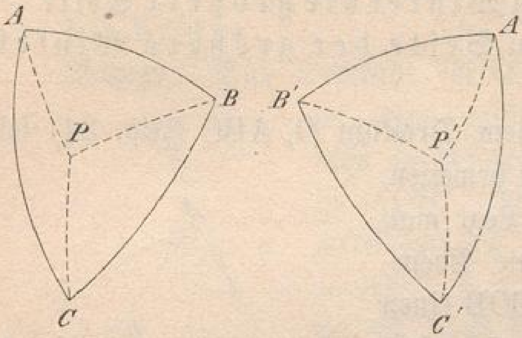


Fig. 35.

Lehrsatz 14.

Der Flächeninhalt eines sphär. Dreiecks verhält sich zur halben Oberfläche seiner Kugel wie sein sphär. Exzeß zu 4 R.

Beweis. Das sphär. Dreieck sei ABC (Fig. 36), die Oberfläche seiner Kugel sei = F. Man erweitere die Seiten des Dreiecks zu Großkreisen, welche sich in den Gegenpunkten A′, B′, C′ von A, B, C zum zweitenmal schneiden. Nun bildet △ ABC mit seinen Nebendreiecken BCA′, CAB′, ABC′ drei sphär. Zweiecke, von denen jedes mit △ ABC einen Winkel gemein hat. Sind daher

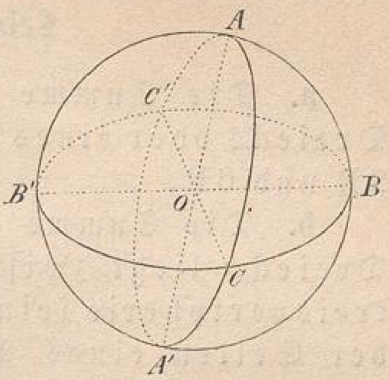


Fig. 36.

α, β, γ die numerischen Werte der drei Winkel, so hat man (nach II. Einl. 15. d):

$$\frac{\triangle ABC + BCA'}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha}{2 R},$$

$$\frac{\triangle ABC + CAB'}{\frac{1}{2} F} = \frac{\beta}{2 R},$$

$$\frac{\triangle ABC + ABC'}{\frac{1}{2} F} = \frac{\gamma}{2 R}.$$

Addiert man diese drei Gleichungen und bemerkt, daß △ ABC′ mit seinem Gegendreieck A′B′C flächengleich ist (II. 13), und daß ABC + BCA′ + CAB′ + A′B′C die halbe Kugeloberfläche einnimmt, so folgt:

$$\frac{2 \triangle ABC + \frac{1}{2} F}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2 R}, \text{ oder}$$

$$\frac{2 \triangle ABC}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2 R}{2 R}, \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2 R}{4 R}.$$

Zusatz. Die Inhalte zweier sphär. Dreiecke gleicher Kugeln verhalten sich zu einander wie ihre sphär. Exzesse.

Lehrsatz 15.

a. Die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks oder eines Dreikants liegt zwischen 2 R und 6 R.

b. Die Summe der Seiten eines sphär. Dreiecks liegt zwischen Null und der Großkreisperipherie seiner Kugel. — Die Summe der Seiten eines Dreikants liegt zwischen Null und 4 R.

Beweis. a. Aus der letzten Gleichung in II. 14 folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2R$ stets positiv, also $\alpha + \beta + \gamma > 2R$ sein muß. Da ferner jeder einzelne Winkel $< 2R$ ist (II. Einl. 16. c), so ist die Summe der drei Winkel $< 6R$.

b. Da die drei Seiten eines Dreikants mit den drei Winkeln seines Polardreikants zusammen 6 R ausmachen (II. 5. b), die drei Winkel des Polardreikants aber (nach a) mehr als 2 R betragen, so müssen die drei Seiten des Dreikants zusammen weniger als 4 R betragen. Daher muß auch im zugehörigen sphär. Dreieck die Summe der Seiten kleiner sein als 360° oder als die Peripherie eines Großkreises der Kugel. — Da ferner die obere Grenze der Winkelsumme des Polardreikants (nach a) $= 6R$ ist, so ist die untere Grenze der Seitensumme des Dreikants $= 0$.

Zusatz. Aus a folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2R < 4R$ ist, daß also in der letzten Gleichung von II. 14 auf der rechten Seite ein ächter Bruch steht. Daher muß auch linker Hand ein ächter Bruch stehen, woraus sich ergiebt: Jedes sphär. Dreieck ist kleiner als die halbe Oberfläche seiner Kugel. — Ferner folgt aus jener Gleichung, daß, je kleiner $\triangle$ ABC im Verhältnis zu $\frac{1}{2}F$ ist, desto kleiner auch sein sphär. Exzeß ist. Der sphär. Exzeß wird $= o$, d. h. die Winkelsumme wird $= 2R$, wenn $F = \infty$ wird, d. h. wenn die Kugeloberfläche zur Ebene wird. (Vgl. II. Einl. 19. b.)

Lehrsatz 16.

Der Flächeninhalt eines sphär. Vielecks verhält sich zur halben Oberfläche seiner Kugel wie sein sphär. Exzeß zu 4 R.

Beweis. Das Vieleck sei ABC . . EF (Fig. 37), seine Winkel seien $= \alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \varphi$, sein Inhalt sei $=$ J, die Oberfläche seiner Kugel $=$ F. Man ziehe von der Ecke A aus sämtliche Diagonalen. Hat das Vieleck n Seiten, so wird es dadurch in $n-2$ sphär. Dreiecke zerlegt, deren Inhalte $= i_1, i_2, \ldots i_{n-2}$ sein mögen. Die Diagonale AC teile den Winkel γ in die zwei Teile γ_1 und γ_2, die Diagonale AD teile den Winkel δ in die zwei Teile δ_1 und δ_2, u. s. w.; der Winkel α wird in $n-2$ Teile geteilt, die $= \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$ seien. Man hat nun (nach II. 14):

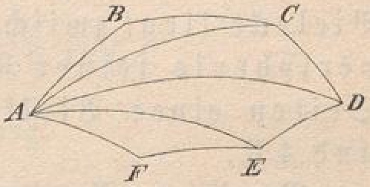


Fig. 37.

$$\frac{i_1}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_1 + \beta + \gamma_1 - 2R}{4R},$$

$$\frac{i_2}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 - 2R}{4R},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{i_{n-2}}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_{n-2} + \varepsilon_2 + \varphi - 2R}{4R}.$$

Addiert man diese $n-2$ Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{J}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots \varepsilon + \varphi - (n-2)\,2R}{4R}.$$

Zusatz 1. Auf gleichen Kugeloberflächen verhalten sich die Inhalte zweier beliebiger sphär. Vielecke wie ihre sphär. Exzesse.

Zusatz 2. Wird als Maßeinheit für die Flächeninhalte auf einer Kugeloberfläche das Kugelzweieck, dessen Äquatorbogen $= 1^\circ$ ist, (also der 360te Teil der Kugeloberfläche) gewählt, so ist der Inhalt eines sphär. Vielecks gleich seinem halben sphär. Exzeß ausgedrückt in Graden.

Lehrsatz 17.

a. Die Summe der Winkel eines sphär. Vielecks oder eines Vielkants von n Seiten liegt zwischen $(n-2).2R$ und $n.2R$.

b. Die Summe der Seiten eines sphär. Vielecks liegt zwischen Null und der Großkreisperipherie seiner Kugel. — Die Summe der Seiten eines Vielkants liegt zwischen Null und 4 R.

Beweis. a. Aus der letzten Gleichung in II. 16 folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2).2R$ stets positiv, also $\alpha + \beta + \gamma + \ldots > (n-2).2R$ sein muß. Da ferner jeder einzelne Winkel $< 2R$, die Anzahl der Winkel aber $= n$ ist, so ist: $\alpha + \beta + \gamma + \ldots < n.2R$.

b. Zerlegt man das spär. Vieleck in Dreiecke, so ist die untere Grenze für die Seitensumme jedes Dreiecks $= 0$ (II. 15. b), folglich ist auch für die Seitensumme des Vielecks die untere Grenze $= 0$. Dasselbe gilt für ein Vielkant. — Um die obere Grenze zu erhalten, verlängere man in dem sphär. Vieleck ABCD . . die an eine Seite BC anstoßenden Seiten AB und DC bis zu ihrem Schnitt S, und zwar so, daß das hinzugefügte Dreieck BCS ganz außerhalb des Vielecks liegt. Aus dem ursprünglichen n-eck ABCD . . wird dann ein $(n-1)$-eck ASD . ., dessen Seitensumme größer ist als diejenige des n-ecks, weil in $\triangle$ BCS: $BS + CS > BC$ ist (II. 11). Durch dasselbe Verfahren kann ferner aus dem $(n-1)$-eck ein $(n-2)$-eck gemacht werden, dessen Seitensumme noch größer ist. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schließlich zu einem Dreieck, und von diesem zu einem Zweieck. Jedes der erhaltenen Vielecke hat eine größere Seitensumme als das vorangehende. Somit ist die Seitensumme des ursprünglichen n-ecks kleiner als diejenige des Zweiecks, also kleiner als die

Großkreisperipherie oder als 360°. Daher ist auch die Seitensumme des zugehörigen Vielkants kleiner als 4 R.

Zusatz. Der Inhalt eines sphär. Vielecks ist stets kleiner als die Halbkugel. — Je kleiner ein sphär. Vieleck im Verhältnis zu seiner Kugeloberfläche ist, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß. Für $F = \infty$ wird der sphär. Exzeß $= o$. (Beweise wie in II. 15. Zus.)

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei Verwertung der krummen Flächen als geom. Örter zu Konstruktionsaufgaben kommen die Flächen als solche zwar in der inneren Vorstellung zur vollen Geltung. Bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion dagegen kann man nicht direkt mit ihnen operieren, da man an das in der Vorbemerkung S. 26 aufgestellte Postulat gebunden ist. Wie nun die hier auftretenden Fundamentalaufgaben mit Rücksicht auf jenes Postulat gelöst werden, zeigen die folgenden Nummern 1—5. Man hat sich dabei die Kugelfläche stets durch Mittelpunkt und Halbmesser gegeben zu denken, die Kegelfläche und Cylinderfläche entweder (als Mantel eines Kegels, bezw. Cylinders) durch Grundkreis und Höhe, oder (als unendlich ausgedehnte Fläche) durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel, bezw. durch Achse und Halbmesser. Umgekehrt läuft die Aufgabe: eine dieser Flächen zu „konstruieren", darauf hinaus, daß die genannten Bestimmungselemente für sie ermittelt werden.

1—5: Fundamentalaufgaben über krumme Flächen.

Aufgabe 1.

a. Den Schnittkreis einer Ebene mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Man fälle von dem geg. Kugelmittelpunkt die Senkrechte auf die geg. Ebene (I. Aufg. 4. a), konstruiere (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck aus dem geg. Kugelhalbmesser als Hyp. und der Senkrechten als Kath., und beschreibe in der geg. Ebene aus dem Fußpunkt der Senkrechten einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 1. a.)

b. Man lege durch die Gerade eine beliebige Ebene und konstruiere deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden die verlangten Punkte. Am einfachsten legt man die Ebene durch den Kugelmittelpunkt und hat dann in dieser Ebene bloß einen Kreis mit dem Kugelhalbmesser aus dem Mittelpunkt zu beschreiben.

(Beweis durch II. Einl. 7. a.)

Aufgabe 2.

a. Den Schnittkreis zweier Kugelflächen zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Kreislinie mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

c. Die Schnittpunkte dreier Kugelflächen zu bestimmen.

Auflösung. a. Man lege durch die zwei geg. Mittelpunkte eine beliebige Ebene und zeichne deren Schnittkreise mit den zwei Kugelflächen, lege hierauf durch die gemeinschaftliche Sehne dieser zwei Kreise senkrecht zu ihrer Ebene eine zweite Ebene, und beschreibe in ihr einen Kreis über der gemeinschaftl. Sehne als Durchmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 2.)

b. Man bestimme den Kreis, nach dem die Ebene der geg. Kreislinie die Kugelfläche schneidet (Aufg. 1. a): so sind die Schnittpunkte dieses Schnittkreises und des geg. Kreises die verlangten Punkte.

c. Man konstruiere den Schnittkreis zweier von den geg. Kugelflächen (Aufg. a), und bestimme die Schnittpunkte dieses Schnittkreises mit der dritten Kugelfläche (Aufg. b): so sind sie die verlangten.

Andere Auflösung. Legt man durch die drei geg. Mittelpunkte eine Ebene, und zeichnet deren Schnittkreise mit den drei Kugelflächen, so schneiden sich die drei gemeinschaftlichen Sehnen nach bekanntem Satze in einem Punkte p. Man lege nun durch eine der drei gemeinschaftl. Sehnen senkrecht zur ersten Ebene eine zweite Ebene, errichte in dieser über der Sehne als Durchmesser einen Kreis, und auf der Sehne im Punkt p die Senkrechte: so sind die Schnittpunkte der Senkrechten mit dem Kreis die verlangten Punkte. — Punkt p muß im Innern der drei Schnittkreise liegen, wenn die Aufgabe möglich sein soll.

Aufgabe 3.

a. Die Schnitt-Mantellinien einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) mit einer Ebene zu bestimmen, die durch die Spitze der Kegelfläche geht (bezw. der Cylinderachse parallel ist).

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) zu bestimmen.

Auflösung. a. Ist die Fläche als Mantel eines Kegels (oder Cylinders) durch Grundkreis und Höhe gegeben, so bestimme man die Schnittlinie der geg. Ebene mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), markiere deren Schnittpunkte mit der Peripherie des Grundkreises, und ziehe durch diese Schnittpunkte Linien nach der Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse): so sind sie die verlangten Schnitt-Mantellinien.

Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel (oder die Cylinderfläche durch Achse und Halbmesser) gegeben, so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis und benütze diesen als Grundkreis wie oben. Bei der Kegelfläche erhält man einen Parallelkreis, indem man durch einen Punkt O der Achse in beliebigem Abstand von der Spitze S eine Ebene M senkrecht zur Achse legt (I. Aufg. 3. a), ein rechtw. Dreieck aus dem geg. erzeugenden Winkel und SO als anliegender Kath. konstruiert, und in der Ebene M aus O einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser beschreibt.

b. Man lege durch die Gerade und die Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse) eine Ebene und bestimme deren Schnitt-Mantellinien mit der geg. Fläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieser Mantellinien mit der geg. Geraden die verlangten Punkte.

Aufgabe 4.

a. Durch einen geg. Punkt an eine Kugelfläche eine Tangente zu ziehen, die einer geg. Ebene parallel sei.

b. Durch zwei geg. Punkte (oder durch eine geg. Gerade) eine Berührungsebene an eine Kugelfläche zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den geg. Punkt eine Ebene parallel zur geg. Ebene (I. Aufg. 1. b), bestimme deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (II. Aufg. I. a), und ziehe an ihn von dem geg. Punkt eine Tangente: so genügt diese der Aufgabe. — Da von einem Punkt an einen Kreis im allgem. zwei Tangenten möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

(Beweis durch II. Einl. 8. c und I. Einl. 6. c.)

b. Sind A und B (Fig. 38) die zwei geg. Punkte, O der Mittelpunkt der geg. Kugelfläche: so lege man durch O die zu

AB senkrechte Ebene M, welche AB in C schneidet (I. Aufg. 3. b), und zeichne in ihr den Großkreis, nach dem sie die Kugelfläche schneidet. Man ziehe sodann an diesen Kreis von C eine Tangente CT und lege durch AB und CT die Ebene N: so genügt diese der Aufgabe. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

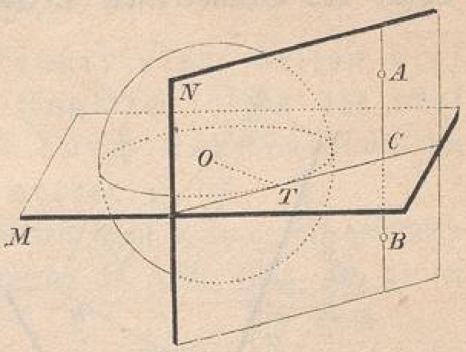


Fig. 38.

Beweis. Die Ebenen M und N stehen senkrecht auf einander (I. 8. a); da ferner Halbm. OT in M liegt und auf der Schnittlinie CT von M und N senkrecht steht, so steht OT auch senkrecht auf N (I. 8. b); folglich ist N Berührungsebene an die Kugelfläche (II. Einl. 8. b). (Anderer Beweis mittels I. 6. Zus. 1.)

Zusatz. Soll durch einen geg. Punkt parallel zu einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so ziehe man durch den geg. Punkt A die Parallele AB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben. — Soll parallel zu einer geg. Ebene eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so fälle man vom Kugelmittelpunkt O die Senkrechte auf die Ebene, schneide auf ihr eine Strecke OT = dem Kugelhalbmesser ab, und lege durch T die Ebene N parallel zur geg. Ebene.

Aufgabe 5.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel mit einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kegel- oder Cylinderfläche zu legen.

Auflösung. **a.** Ist die Kegelfläche als Mantel eines Kegels durch Grundkreis und Höhe gegeben, so verbinde man den geg. Punkt A (Fig. 39) mit der Spitze S, bestimme den Schnittpunkt B der Verbindungslinie mit der Ebene des Grundkreises (I. Aufg. 6. a), und ziehe von B an den Grundkreis eine Tangente BT. Legt man dann durch SB und BT die Ebene N: so genügt N als Berührungsebene mit ST als Berührungs-Mantellinie der Aufgabe. Man erhält im allgem. zwei Lösungen. — Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel geg., so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis wie in Aufg. 3. a, und benütze diesen als Grundkreis. Am einfachsten wird die Parallelkreis-Ebene durch den Punkt A selbst gelegt.

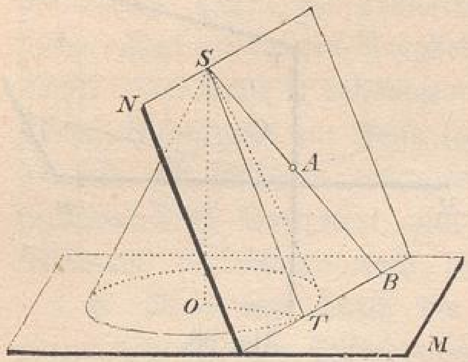


Fig. 39.

Beim Cylinder ziehe man durch A die Parallele zur Achse, bestimme deren Schnittpunkt B mit der Grundkreis-Ebene, und verfahre im übrigen wie beim Kegel.

b. Man ziehe durch die Spitze S der Kegelfläche die Parallele SB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben.

Beim Cylinder lege man durch die geg. Gerade eine Ebene parallel zur Cylinderachse (I. Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittlinie mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), und lege parallel zu dieser eine Tangente an den Grundkreis; zieht man dann durch den Berührungspunkt die Parallele zur Achse, und legt durch sie und die Tangente eine Ebene, so genügt diese der Aufgabe.

(Beweise durch II. Einl. 3. c und 2. c.)

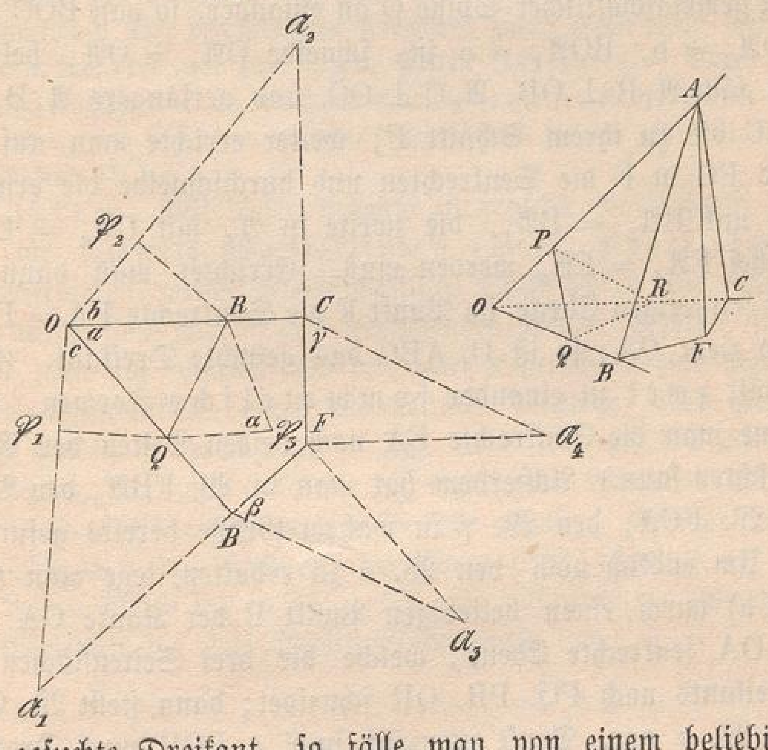
6—9: **Dreikant-Konstruktionen.**

Aufgabe 6.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Seiten gegeben sind. Zugleich sollen die drei Winkel des Dreikants durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

Auflösung. Die geg. Seiten seien a, b, c; die gesuchten Winkel α, β, γ. Angenommen: O, ABC (Fig. 40. a) sei

Fig. 40. b. Fig. 40. a.



das gesuchte Dreikant, so fälle man von einem beliebigen Punkt A der Kante OA die Senkrechte AF auf die gegenüberliegende Seitenfläche. Fällt man hierauf FB $\perp$ OB, FC $\perp$ OC, und zieht AB, AC, so ist auch AB $\perp$ OB, AC $\perp$ OC (I. 9. b), und es ist W. FBA = β, W. FCA = γ. Die entstandene Figur enthält nun ein Viereck mit zwei rechten Winkeln, ferner vier rechtw. Dreiecke, die an die vier Seiten des Vierecks anstoßen. Legt man diese vier rechtw. Dreiecke in die Ebene des Vierecks um, indem man sie um die vier Seiten desselben (nach außen) dreht, so seien (Fig. 40. b) $OB\mathfrak{A}_1$, $OC\mathfrak{A}_2$, $FB\mathfrak{A}_3$, $FC\mathfrak{A}_4$ ihre neuen Lagen. $B\mathfrak{A}_1$ fällt in die Verlängerung von FB, $C\mathfrak{A}_2$ in die Verlängerung von FC; ferner ist $O\mathfrak{A}_2 = O\mathfrak{A}_1$, $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, $C\mathfrak{A}_4 = C\mathfrak{A}_2$, $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$. — Nach diesen Bemerkungen fällt es nicht schwer, aus den geg. Seiten a, b, c die Figur 40. b, bezw. eine ihr ähnliche — und damit das Dreikant und die Größen seiner Winkel β und γ zu konstruieren:

Man lege (Fig. 40. b) in einer Ebene die drei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß $BOC = a$, $CO\mathfrak{A}_2 = b$, $BO\mathfrak{A}_1 = c$ ist, schneide $O\mathfrak{A}_1 = O\mathfrak{A}_2$ beliebig ab, fälle $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, $\mathfrak{A}_2C \perp OC$, und verlängere $\mathfrak{A}_1B$ und $\mathfrak{A}_2C$ bis zu ihrem Schnitt F; weiter errichte man auf FB und FC in F die Senkrechten und durchschneide die erste in $\mathfrak{A}_3$ mit $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, die zweite in $\mathfrak{A}_4$ mit $C\mathfrak{A}_4 = C\mathfrak{A}_2$, wobei $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ werden muß. Errichtet man dann auf der seitherigen Ebene im Punkt F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$, und zieht OA: so ist O, ABC das gesuchte Dreikant. (Man erhält z w e i zu einander s y m m e t r i s c h e Formen, insoferne man die Senkrechte FA nach beiden Seiten der Ebene errichten kann.) Außerdem hat man in W. $FB\mathfrak{A}_3$ den W. β, in W. $FC\mathfrak{A}_4$ den W. γ in wahrer Größe bereits gefunden. — Um endlich noch den W. α zu erhalten, lege man (Fig. 40. a) durch einen beliebigen Punkt P der Kante OA eine zu OA senkrechte Ebene, welche die drei Seitenflächen des Dreikants nach PQ, PR, QR schneidet; dann stellt W. QPR den W. α vor. Denkt man sich nun $\triangle$ PQR durch Drehung um QR ebenfalls in die Ebene BOC umgelegt, so kann es in dieser Lage leicht gezeichnet werden. Man zeichne nämlich zunächst die zwei rechtw. Dreiecke OPQ und OPR in umgelegter Lage, indem man (Fig. 40. b) $O\mathfrak{P}_1 = O\mathfrak{P}_2$ beliebig auf $O\mathfrak{A}_1$ und $O\mathfrak{A}_2$ abschneidet, und auf $O\mathfrak{P}_1$ und $O\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Senkrechten errichtet, welche OB und OC in Q und R schneiden; zieht man dann QR, und beschreibt aus

Q und R mit $Q\mathfrak{P}_1$ und $R\mathfrak{P}_2$ Kreisbögen, die sich in $\mathfrak{P}_3$ schneiden: so ist $QR\mathfrak{P}_3$ das umgelegte Dreieck, also W. $Q\mathfrak{P}_3R = \alpha$.

Anm. 1. Die Punkte O, $\mathfrak{P}_3$, F (Fig. 40. b) müssen in einer geraden Linie liegen, welche $\perp$ QR ist. (Bew. durch I. Anh. 28 u. I. 9. b.)

Anm. 2. In Fig. 40. b fällt Punkt F innerhalb des Winkels BOC. Würde F außerhalb fallen, und zwar über OB hinaus, so würde das (stumpfe) Supplement von W. $FB\mathfrak{A}_3$ als W. β zu nehmen sein. Dasselbe gilt von W. γ, wenn F über OC hinaus fällt. — Ist eine der drei geg. Seiten stumpf, so lege man diese in die Mitte. Sind zwei oder drei Seiten stumpf, so bleibt die Konstruktion zwar Schritt für Schritt die nämliche; doch kann man immerhin behufs größerer Anschaulichkeit statt des gesuchten Dreikants zuerst eines seiner Nebendreikante mit drei oder zwei spitzen Seiten konstruieren. — Damit die Aufgabe möglich sein soll, muß die Summe je zweier Seiten größer als die dritte, und die Summe aller drei Seiten kleiner als 4 R sein. (II. 11 und 15. b.)

Zusatz. Mit dieser Aufgabe ist zugleich die Aufgabe gelöst: die Schnitt-Mantellinien zweier Kegelflächen zu konstruieren, welche gemeinschaftliche Spitze haben und außerdem durch ihre Achsen und erzeugenden Winkel gegeben sind. Denkt man sich nämlich von den zwei Kegelflächen zwei Kegelmäntel abgeschnitten, deren Mantellinien beliebige, aber gleiche Länge haben, so kann man in Fig. 40. b OB und OC als die geg. Achsen, W. b und c als die geg. erzeugenden Winkel, $\triangle OB\mathfrak{A}_1$ und $OC\mathfrak{A}_2$ als die erzeugenden Dreiecke ansehen. Errichtet man schließlich in F die Senkrechte zur Ebene BOC, schneidet auf ihr nach beiden Seiten $FA = FA' = F\mathfrak{A}_3$ ab, und zieht OA und OA': so stellen diese die zwei Schnitt-Mantellinien vor.

Aufgabe 7.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Winkel gegeben sind.

Auflösung. Die drei geg. Winkel seien α, β, γ. Man konstruiere zuerst (II. Aufg. 6) ein Dreikant, dessen Seiten $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ sind, und stelle dann dessen Polardreikant her (II. Einl. 21. b): so ist dieses das verlangte. Die Supplemente der Winkel des zuerst konstruierten Dreikants stellen die Seiten des gesuchten Dreikants vor.

(Beweis durch II. 5. b.)

Anm. Eine direkte Lösung findet sich angedeutet in II. Anh. Aufg. 42.

Aufgabe 8.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind, und zwar

a. der von den zwei Seiten eingeschlossene Winkel,

b. der — einer der zwei Seiten gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, S. c und W. β. Man kann aus den geg. Elementen die Fig. 40. b (S. 91) leicht konstruieren. Man lege nämlich in einer Ebene die zwei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß $BOC = a$, $BO\mathfrak{A}_1 = c$ ist, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1 B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1 B$ den Winkel $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3 F \perp BF$. Errichtet man dann auf der Ebene BOC in F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$ und zieht OA: so ist O,ABC das gesuchte Dreikant. — Es ist leicht (vgl. Aufg. 6), die Figur 40. b zu vollenden und damit die übrigen Elemente des Dreikants b, γ, α durch ebene Konstruktion zu erhalten.

b. Gegeben: S. b, S. c und W. β. Man mache (Fig. 40. b) W. $BO\mathfrak{A}_1 = c$, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1 B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1 B$ W. $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3 F \perp BF$. Es kann nun weiter $\triangle OC\mathfrak{A}_2$ (zwar nicht seiner Lage, aber doch seiner Gestalt nach) in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus $O\mathfrak{A}_2 = O\mathfrak{A}_1$ und W. $CO\mathfrak{A}_2 = b$. Ist dadurch die Länge von OC gefunden, so beschreibe man über OF als Durchmesser einen Kreis, lege OC als Sehne hinein, und vollende die Konstruktion wie bei Aufg. 6. — Da zwei Lagen der Sehne OC möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

Aufgabe 9.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, und zwar

a. die der Seite anliegenden Winkel,

b. ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, W. β und W. γ. Es können von Fig. 40. b (S. 91) zunächst die zwei rechtw. Dreiecke FBA_3 und FCA_4 ihrer Gestalt nach in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus den Katheten $FA_3 = FA_4 =$ einer beliebig gewählten Strecke und aus den W. β und γ als gegenüberliegenden Winkeln. Sind dadurch die Längen von FB und FC gefunden, so mache man W. BOC = der geg. S. a und bestimme in der Ebene dieses Winkels den Punkt F so, daß seine Entfernungen FB und FC von OB und OC die gefundenen Längen haben. Hierauf kann die Figur ohne Schwierigkeit vollendet werden.

b. Gegeben: S. c, W. β und W. γ. Man beginne die Konstruktion (Fig. 40. b) mit Zeichnung der zwei Dreiecke OBA_1 und FBA_3 wie in Aufg. 8. b, konstruiere sodann $\triangle FCA_4$ seiner Gestalt nach in einer Nebenfigur aus $FA_4 = FA_3$ und W. $FCA_4 = \gamma$, beschreibe über OF als Durchmesser einen Kreis, lege die in der Nebenfigur gefundene Länge von FC als Sehne hinein, und ziehe OC; worauf die Konstruktion wie seither vollendet werden kann. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

(Andere Auflösung von Aufg. a und b durch Zurückführung auf Aufg. 8. a und b mittels des Polardreikants, ähnlich wie bei Aufg. 7.)

10: Fundamentalkonstruktionen der Sphärik.

Aufgabe 10.

Gegeben eine massive Kugel, deren Halbmesser nicht bekannt ist, und auf deren Oberfläche die Konstruktionen mit bloßer Anwendung eines Zirkels ausgeführt werden sollen.

a. Von einem auf der Kugeloberfläche aufgezeichneten Kugelkreis den ebenen Halbmesser zu finden.

b. Den Halbmesser der Kugel zu bestimmen.

c. Durch zwei auf der Kugeloberfläche geg. Punkte einen Großkreis zu legen.

Auflösung. a. Man nehme auf dem geg. Kugelkreis drei beliebige Punkte an, steche mit dem Zirkel ihre Entfernungen ab, und zeichne in einer Ebene ein Dreieck mit diesen drei Entfernungen als Seiten: so ist der dem Dreieck umbeschriebene Kreis gleich dem geg. Kugelkreis.

b. Man beschreibe aus einem beliebigen Punkt der Kugeloberfläche mit beliebiger Zirkelöffnung einen Kugelkreis (vgl. II. Einl. 13. d) und bestimme dessen ebenen Halbmesser (Aufg. a). Konstruiert man dann ein rechtwinkliges Dreieck aus dem ebenen Halbmesser als Höhe und der zuerst benützten Zirkelöffnung als Kathete: so ist die Hypotenuse gleich dem Durchmesser der Kugel.

c. Man zeichne in einer Ebene einen Kreis, dessen Halbmesser gleich dem Kugelhalbmesser ist (Aufg. b); dann stellt der vierte Teil seiner Peripherie den sphär. Halbmesser eines Großkreises der Kugeloberfläche vor (II. Einl. 13. e). Nimmt man also die zugehörige Sehne in den Zirkel, und schlägt auf der Kugeloberfläche mit dieser Zirkelöffnung aus den zwei geg. Punkten Kreisbögen, so sind deren zwei Schnittpunkte die beiden Pole des gesuchten Großkreises (II. 4. b); beschreibt man aus einem von ihnen mit der nämlichen Zirkelöffnung einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Anm. Hiernach können sämtliche Konstruktionen der Sphärik (vgl. II. Einl. 13. f) auf der Kugeloberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels ausgeführt werden. Liegt eine Kugel geg. vor, so wird man den sphär. Halbmesser ihrer Großkreise gleich zu Anfang ein für allemal bestimmen. (Die Schenkel des zu benützenden Zirkels müssen größer als der Halbmesser der Kugel sein.)

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—16: Die Kugel. Geometrische Örter. Berührungskegel.

1. Das Produkt aus den zwei Abschnitten aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Kugel ist konstant. (Die Abschnitte sind additiv oder subtraktiv, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Kugel liegt.)

2. Unter allen durch einen Punkt im Innern einer Kugel gelegten Ebenen erzeugt diejenige, welche auf dem durch den Punkt gehenden Halbmesser senkrecht steht, den kleinsten Schnittkreis.

3. Schneidet man zwei konzentrische Kugelflächen durch eine beliebige Ebene, so hat der Kreisring zwischen den zwei Schnittkreisen einen konstanten Flächeninhalt.

4. Durch drei in drei verschiedenen Ebenen liegende Kreise, von denen jeder jeden zweimal schneidet, läßt sich immer eine Kugelfläche legen. (I. 12. Zus. 2.)

5. a. Eine Kugelfläche wird von einer sie schneidenden Kegel- oder Cylinderfläche, deren Achse durch ihren Mittelpunkt geht, nach zwei Kreislinien geschnitten, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind.

b. Lehrsatz I. 12 bleibt richtig, wenn statt „Ebene" — „Kugelfläche" gesetzt wird. Der Punkt kann außerhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegen. Unter „Fußpunkt der Senkrechten" ist der Fußpunkt der kürzesten Strecke zu verstehen. Die längste Strecke fällt in dieselbe Gerade (Zentrallinie) wie die kürzeste.

6. Ein Körper, der von jeder Schnittebene nach einem Kreise geschnitten wird, ist eine Kugel.

7. Der geom. Ort einer Ebene, die eine feste Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser schneidet, ist eine mit ihr konzentrische Kugelfläche.

† 8. a. Der geom. Ort einer Ebene, die von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen hat, besteht aus zwei Punkten, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.*) — Ist das geg. Verhältnis das der Gleichheit, so fällt der eine Punkt ins Unendliche.

b. Der geom. Ort einer Ebene, die von drei (nicht in gerader Linie liegenden) festen Punkten geg. Verhältnisse der Entfernungen hat, wird gebildet von vier Geraden, die in der Ebene der drei festen Punkte so liegen, daß ihre Entfernungen von diesen die geg. Verhältnisse haben. — Bei Gleichheit der Entfernungen fällt eine der vier Geraden ins Unendliche.

9. Der geom. Ort der Schnittlinie zweier Ebenen, die durch zwei feste parallele Gerade gehen und einen Keil von geg. Größe einschließen, ist eine Cylinderfläche, der die zwei festen Geraden als Mantellinien angehören.

† 10. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Verbindungsstrecken mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschließen, ist eine Kugelfläche, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte zum Durchmesser hat.

† 11. a. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis haben, ist eine Kugelfläche über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die Strecke zwischen den zwei festen Punkten in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.

b. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von

*) Ein Punkt oder eine Gerade kann als geom. Ort einer Ebene gelten, insoferne der Punkt als unendlich kleine Kugel, die Gerade als unendlich dünne Cylinderfläche angesehen werden kann. Jede durch den Punkt oder die Gerade gelegte Ebene hat die in Rede stehende Eigenschaft. — Auch der unendlich ferne Punkt einer Geraden oder die unendlich ferne Gerade einer Ebene kann als geom. Ort auftreten. Alsdann hat jede mit der Geraden oder der Ebene parallele Ebene die in Rede stehende Eigenschaft.

drei festen Punkten geg. Verhältnisse haben, ist eine Kreislinie, die symmetrisch zu der Ebene der drei festen Punkte liegt und sie in denjenigen zwei Punkten schneidet, die in der Ebene die geg. Verhältnisse der Entfernungen von den drei festen Punkten haben.

(Inwieferne sind I. Anh. 18. a und b spezielle Fälle der vorangehenden zwei Sätze?)

12. a. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Ebene berührt (oder aus ihr einen Kreis von geg. Halbmesser ausschneidet), besteht aus zwei mit der festen Ebene parallelen und symmetrisch zu ihr liegenden Ebenen.

b. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Kugelfläche berührt (oder sie nach einer Kreislinie von geg. Halbmesser schneidet), besteht aus zwei mit der festen Kugel konzentrischen Kugelflächen.

† 13. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an eine feste Kugel gelegten Tangenten eine geg. Länge haben, oder daß der von ihm an die Kugel gelegte Berührungskegel eine geg. Öffnung hat, ist eine mit der geg. Kugel konzentrische Kugelfläche.

14. a. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kugeln gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, ist eine zur gemeinschaftl. Zentrallinie senkrechte Ebene, welche die Potenzebene der zwei Kugeln heißt. Schneiden sich die zwei Kugeln, so stellt die Ebene ihres Schnittkreises die Potenzebene vor.

b. Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich nach einer Geraden (Potenzlinie), welche zu der Ebene der drei Mittelpunkte senkrecht steht. — Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in einem Punkt (Potenzpunkt).

15. a. Legt man von beliebigen Punkten einer geraden Linie Berührungskegel an eine feste Kugel, so schneiden sich deren Berührungskreise alle in zwei festen Punkten der Kugeloberfläche, welche zugleich die Berührungspunkte der zwei Berührungsebenen vorstellen, die durch die Gerade an die Kugel gelegt werden können. (Wie lautet der entsprechende Satz für Berührungscylinder? — II. Einl. 9. c und d.)

b. Legt man durch zwei Punkte, von denen der eine fest ist, der andere sich beliebig im Raum bewegt, die zwei Berührungsebenen an eine feste Kugel, so ist der geom. Ort der zwei Berührungspunkte ein fester Kugelkreis.

16. a. Ist an eine Kugel ein Berührungskegel gelegt, und zieht man durch die Kegelspitze eine beliebige Sekante, so wird deren innerhalb der Kugel fallende Sehne in ihrem Schnittpunkt mit der Ebene des Berührungskreises und in der Kegelspitze harmonisch geteilt.

b. Sind an eine Kugel zwei Berührungskegel gelegt, und liegt die Spitze des ersten in der Ebene des Berührungskreises des zweiten, so liegt auch die Spitze des zweiten in der Ebene des Berührungskreises des ersten.

(Beweise durch Zurückführung auf die entsprechenden Sätze der ebenen Geom.)

17—25: Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. Kegelschnitte.

† 17. a. Zieht man in zwei Kugeln beliebige Paare paralleler und gleichgerichteter Halbmesser und verbindet deren Endpunkte, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in einem Punkt der gemeinschaftlichen Zentrallinie, welcher der äußere Ähnlichkeitspunkt der zwei Kugeln heißt. Zieht man die parallelen Halbmesser jedesmal in entgegengesetzter Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einem zweiten Punkt der Zentrallinie, welcher der innere Ähnlichkeitspunkt heißt. Die beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Strecke zwischen den Kugelmittelpunkten im Verhältnis der Halbmesser harmonisch.

† b. Legt man durch die gemeinschaftl. Zentrallinie zweier Kugeln eine Schnittebene und zieht an die zwei Schnittkreise die vier gemeinschaftl. Tangenten, so beschreiben diese, wenn die Ebene um die Zentrallinie gedreht wird, zwei Kegelflächen, welche beide Kugeln berühren. Der von den äußeren gemeinschaftl. Tangenten beschriebene Kegel heißt der äußere —, der von den inneren beschriebene heißt der innere gemeinschaftliche Berührungskegel der zwei Kugeln. Ihre Spitzen sind identisch mit den zwei Ähnlichkeitspunkten der Kugeln. — Jede Berührungsebene an einen der zwei Kegel berührt auch beide Kugeln und heißt äußere oder innere gemeinschaftl. Be-

rührungsebene, je nachdem sie den äußeren oder den inneren gemeinschaftl. Berührungskegel berührt und also durch den äußeren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

18. Der geom. Ort eines Punktes, der eine von einem festen Punkt S nach einem beliebigen Punkt einer Kugelfläche gezogene Strecke in einem geg. Verhältnis teilt, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt O' die Zentralstrecke SO in dem geg. Verhältnis teilt, und deren Halbmesser sich zum Halbmesser der geg. Kugel verhält wie SO' zu SO. (Vor. Satz a.)

19. Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kugeln liegen in einer Geraden, welche die äußere Ähnlichkeitsachse der drei Kugeln heißt. Je zwei innere Ähnlichkeitspunkte liegen mit einem äußeren in einer Geraden, welche eine innere Ähnlichkeitsachse heißt.

† 20. Haben zwei Kegelflächen gemeinschaftliche Spitze, und beschreibt man jeder eine beliebige Berührungskugel ein, so ist der geom. Ort für deren äußeren, bezw. inneren Ähnlichkeitspunkt je eine durch die gemeinschaftl. Spitze gehende Gerade, welche zugleich die Schnittlinie der beiden äußeren, bezw. inneren gemeinschaftl. Berührungsebenen der zwei Kegelflächen vorstellt. (II. Einl. 9. c.)

21. Der geom. Ort eines Punktes, von dem aus gesehen zwei feste Kugeln gleich groß erscheinen*), ist eine Kugelfläche, welche die Strecke zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten der Kugeln zum Durchmesser hat. (II. Anh. 11. a.)

22. a. Ist an zwei Kugeln, die sich nicht schneiden, der äußere gemeinschaftl. Berührungskegel gelegt, so wird dessen Mantel von einer beliebigen inneren gemeinschaftl. Berührungsebene der zwei Kugeln nach einer Kurve geschnitten, deren Punkte eine konstante Summe der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten haben. — Schneidet man ebenso den Mantel des inneren gemeinschaftl. Berührungskegels durch eine äußere gemeinschaftl. Berührungsebene, so haben die Punkte der Schnittkurve eine konstante Differenz der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten. Die Schnittkurve heißt im ersten Fall Ellipse, im zweiten Fall

---

*) Die scheinbare Größe ist abhängig von der Öffnung des von dem Punkt an die Kugel gelegten Berührungskegels.

Hyperbel; die zwei Berührungspunkte heißen ihre Brennpunkte. (Die konstante Summe oder Differenz ist gleich dem Stück einer Mantellinie des Berührungskegels zwischen den beiden Berührungskreisen. II. Einl. 8. c u. 9. b.)

b. Eine Cylinderfläche wird von jeder Ebene, die nicht parallel ihrer Achse ist, nach einer Ellipse geschnitten. (Man beschreibe der Cylinderfläche zwei Berührungskugeln ein, welche die Schnittebene berühren.)

c. Der Schnittpunkt der Cylinderachse mit der Ebene heißt der Mittelpunkt der Ellipse, er halbiert die Strecke zwischen den zwei Brennpunkten und hat die Eigenschaft, daß jede durch ihn gezogene Ellipsensehne (Durchmesser) in ihm halbiert wird. Der Durchmesser, auf dem die zwei Brennpunkte liegen, heißt die große —, der zu ihm senkrechte Durchmesser die kleine Achse der Ellipse; der letztere ist gleich dem Durchmesser des Cylinders. Die konstante Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den zwei Brennpunkten ist gleich der großen Achse. (Wie findet man hiernach die Brennpunkte einer Ellipse, von der die Achsen geg. sind?) — Jeder Parallelkreis des Cylinders kann als eine Projektion der Ellipse angesehen werden. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist ihr Flächeninhalt $= a\,b\,\pi$. (I. Anh. 31.)

23. Ist einem Kegelmantel eine Berührungskugel einbeschrieben, und legt man parallel mit einer beliebigen Berührungsebene des Kegels eine Berührungsebene M an die Kugel, so schneidet M den Kegelmantel nach einer Kurve von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte gleiche Entfernungen hat von dem Berührungspunkt der Ebene M und von ihrer Schnittlinie mit der Ebene des Berührungskreises des Kegelmantels. Die Kurve heißt Parabel, der Berührungspunkt heißt ihr Brennpunkt, jene Schnittlinie ihre Direktrix. (Ist S die Kegelspitze, F der Brennpunkt, A ein beliebiger Kurvenpunkt, AB die auf die Direktrix gefällte Senkrechte, T der Schnittpunkt von SA mit dem Berührungskreis, U der Schnittpunkt der zur Ebene M parallelen Mantellinie mit dem Berührungskreis, so ist $AF = AT$, $AB \parallel SU$, $\triangle ABT \backsim SUT$.)

24. Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt S zweier Kugeln eine beliebige Gerade, welche die eine Kugelfläche in X und

Y, die andere in X' und Y' schneidet, wobei Halbm. $OX \parallel O'X'$, $OY \parallel O'Y'$ sei, so ist: $SX . SY' = SX' . SY = \text{const.}$

25. a. Werden zwei Kugeln von einer dritten berührt, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der zwei ersten Kugeln, und zwar durch den äußeren oder den inneren, je nachdem die zwei Berührungen gleichartig (d. i. entw. beide von außen od. beide von innen) oder ungleichartig sind.

b. Werden drei Kugeln von einer vierten berührt, so geht die durch die drei Berührungspunkte gelegte Ebene durch eine Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kugeln, und zwar durch die äußere oder eine innere, je nachdem die drei Berührungen gleichartig sind oder nicht.

26—52: Sphärik und Vielkant.

26. Die Sätze II. 5. a und b gelten auch für ein sphär. Vieleck oder ein Vielkant. (I. Anh. 9.)

† 27. Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und gleich gerichtet sind, sind kongruent. — Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, sind symmetrisch.

† 28. a. Nimmt man auf jeder Kante eines Vielkants einen Punkt an, und bestimmt zu jedem dieser Punkte sowie zur Spitze den symmetrischen Punkt in Beziehung auf eine beliebige Ebene, so bilden die Verbindungslinien des zur Spitze symmetrischen Punktes mit den übrigen symmetrischen Punkten ein Vielkant, das mit dem ursprünglichen Vielkant entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch ist. (I. Anh. 15.)

b. Legt man durch zwei Gegenpunkte P und Q einer Kugeloberfläche eine Anzahl von Großkreisen und schneidet auf jedem vier gleiche Bögen von beliebiger Länge $PA = PA' = QA'' = QA'''$, $PB = PB' = QB'' = QB'''$, u. s. f. ab, so zwar, daß die Punkte A'', B'', . . mit A, B, . . —, A''', B''', . . mit A', B', . . je auf dem nämlichen Halbkreis liegen, so bilden diese Punkte die Ecken von vier entsprechend-gleichen sphär. Vielecken, von denen je zwei kongruent oder symmetrisch sind, je nachdem sie auf derselben Seite des zu P und Q gehörigen Äquators liegen, oder auf verschiedenen Seiten.

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 29 bis 38 die nur für Dreikante ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für sphärische Dreiecke gleicher Kugeln.

29. Die Summe zweier Seiten eines Dreikants und die Summe ihrer Gegenwinkel sind beide gleichzeitig entweder größer oder kleiner als 180°. (Mit Hilfe eines Nebendreikants, das mit dem ursprüngl. Dreikant eine der zwei fraglichen Seiten gemein hat. II. 12.)

† 30. a. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel einer derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenwinkel des andern Paars gleicher Seiten entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Indirekt: Wären die dritten Seiten nicht gleich, so könnte man von der einen ein Stück gleich der andern abschneiden u. s. w.)

† b. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenseiten des andern Paars gleicher Winkel entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Durch Satz a mit Hilfe der Polardreikante.)

31. Zwei rechtwinklige Dreikante (mit nur einem rechten W.) sind entsprechend-gleich, a) wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete bezw. gleich haben, b) wenn sie die Hypotenuse und einen der Hypotenuse anliegenden Winkel bezw. gleich haben.

32. Sind in einem Dreikant zwei Winkel = 90°, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten = 90°; und umgekehrt.

33. a. In einem gleichschenkligen Dreikant fallen die zur Grundfläche gehörige Höhenebene, Mittellotebene, seitenhalbierende Transversalebene und Medianebene zusammen.

b. In einem allgem. Dreikant wird jede Seite von der zugehörigen Höhenebene in zwei ungleiche Segmente geteilt, von denen das größere der größeren —, das kleinere der kleineren der zwei andern Seiten anliegt. (I. 13. b mit Zus. 1.)

34. Haben zwei Dreikante zwei Seiten bezw. gleich, und ist der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen größer als im andern, so ist auch die dritte Seite im einen größer als im andern; und umgekehrt. (Bew. wie in der ebenen Geometrie.)

† 35. Die Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche mit den drei Kanten gleiche

Winkel macht. (I. Anh. 19. b. — Achse des umbeschriebenen Kegelmantels; Mittelpunkt des einem sphär. Dreieck umbeschr. Kreises.)

† 36. Die drei inneren Medianebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche gegen die drei Seitenflächen gleich geneigt ist. Dasselbe gilt von je einer inneren und zwei äußeren Medianebenen. (I. Anh. 20. — Achsen des einbeschriebenen und der drei anbeschriebenen Kegelmäntel; Mittelpunkte des einem sphär. Dreieck einbeschriebenen Kreises und der drei anbeschriebenen Kreise, die letzteren sind den drei Nebendreiecken einbeschrieben.)

37. Die seitenhalbierenden Transversalebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Mittels eines Schnittdreiecks, dessen Ecken von der Spitze gleich weit entfernt sind.)

38. Die Höhenebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Man lege senkrecht zu einer Kante eine Ebene und betrachte das Schnittdreieck.)

39. Die Großkreisbögen, welche die Ecken eines sphär. Dreiecks mit den Ecken seines Polardreiecks verbinden, schneiden sich in einem Punkt. (Vor. Satz.)

40. Die Mittellote der Seiten eines sphär. Dreiecks sind identisch mit den Medianen seines Polardreiecks. Der umbeschriebene Kreis des einen Dreiecks und der einbeschriebene Kreis des andern haben daher denselben sphär. Mittelpunkt, und ihre sphär. Halbmesser ergänzen sich zu 90°.

† 41. a. Ist das in II. Einl. 22. a zur Erzeugung eines Vielkants benützte ebene Vieleck regulär, und liegt die Spitze auf der Geraden, die auf der Ebene des Vielecks in seinem Mittelpunkt senkrecht steht, so ist das erzeugte Vielkant regulär.

b. In einem regulären Vielkant schneiden sich sämtliche innere Medianebenen und die Mittellotebenen sämtlicher Seiten nach einer und derselben Geraden.

c. Jedem regulären Vielkant läßt sich ein Kegelmantel umbeschreiben und ein Kegelmantel einbeschreiben. Sie haben die in b genannte Gerade zur gemeinsamen Achse.

(Entsprechende Sätze fürs reguläre sphär. Vieleck.)

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 42 bis 51 die für Kugelkreise ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für Kegelflächen.

42. a. Liegt auf einer Kugeloberfläche ein Kugelkreis und ein Punkt A, so sind die sphär. Entfernungen der einzelnen Kreispunkte von A um so größer, je größere Winkel die nach ihnen gezogenen sphär. Halbmesser mit dem nach A gerichteten Halbmesser machen. Für die kleinste Entfernung ist dieser Winkel $= 0$, für die größte $= 180^\circ$. Je zwei Entfernungen, die zu beiden Seiten des nach A gerichteten Halbmessers symmetrisch zu ihm liegen, sind gleich. (II. Anh. 34 und II. 6.)

† b. Unter den sphär. Entfernungen eines Punktes der Kugeloberfläche von den einzelnen Punkten eines Großkreises sind die zwei auf dem Großkreise senkrechten die größte und die kleinste. Die letztere wird als die sphär. Entfernung des Punktes von dem Großkreise bezeichnet.

† 43. a. Ein Großkreis, der auf einem sphär. Halbmesser eines Kleinkreises in dessen Endpunkt senkrecht steht, hat mit dem Kleinkreis nur diesen einen Punkt gemein. Er heißt die sphär. Tangente des Kleinkreises in dem Punkt. Seine Ebene ist Berührungsebene an den dem Kleinkreis zugehörigen Kegel. Die Schnittlinie seiner Ebene mit der Ebene des Kleinkreises ist Tangente sowohl an den Kleinkreis als an den Großkreis.

b. Die zwei von einem Punkt einer Kugeloberfläche an einen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten sind gleich. (II. Anh. 31. a.)

44. a. Läßt sich in ein sphär. Viereck ein Kreis einbeschreiben, so ist die Summe zweier Gegenseiten des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenseiten; und umgekehrt. (Vor. Satz.)

b. Läßt sich um ein sphär. Viereck ein Kreis beschreiben, so ist die Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenwinkel; und umgekehrt.

† 45. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, der von einem Großkreise eine geg. sphär. Entfernung hat, besteht aus zwei gleichen Kleinkreisen, die zu beiden Seiten des Großkreises liegen und mit ihm die Pole gemein haben.

46. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche von der Eigenschaft, daß die von ihm an einen festen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten eine geg. Länge haben oder einen geg. Winkel einschließen, ist ein mit dem Kleinkreis konzentrischer Kugelkreis.

47. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche

von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kleinkreise gelegten sphär. Tangenten gleiche Länge haben, ist ein Großkreis, dessen Ebene durch die Schnittlinie der Ebenen der Kleinkreise geht. (Die von einem Punkt jener Schnittlinie an die zwei Kreise gezogenen geradlinigen Tangenten sind gleich.)

48. a. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den der Gegenseite anbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Umfang. (II. Anh. 43. b.)

b. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den einbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der zwei den Winkel einschließenden Seiten über die dritte Seite.

49. Alle sphär. Dreiecke, welche die Grundlinie und den umbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der Winkel an der Grundlinie über den Winkel an der Spitze. (Man ziehe die sphär. Halbmesser nach den Ecken.)

50. Der geom. Ort der Spitzen C aller flächengleichen sphär. Dreiecke auf der nämlichen Grundlinie AB ist ein durch die Gegenpunkte A′, B′ gehender Kugelkreis. (Satz von L e x e l l.) (Bewegt sich C auf dem genannten Kugelkreis, so ist in $\triangle$ A′B′C nach dem vor. Satz W. A′ + B′ — C konstant.)

† 51. Der geom. Ort eines Großkreises, der einen festen Großkreis unter einem geg. Winkel schneidet, besteht aus zwei gleichen, mit dem festen Großkreis konzentrischen Kleinkreisen, deren sphär. Halbmesser den Äquatorbogen des geg. Winkels komplementieren.

† 52. a. Ist P derjenige Pol des Grundkreises einer Halbkugel, der nicht auf der Halbkugel liegt, und zieht man von P nach einem beliebigen Punkt A eine Gerade, welche die Ebene des Grundkreises in A′ schneidet, so heißt A′ die s t e r e o g r a p h i s c h e P r o j e k t i o n von A. Die Ebene des Grundkreises heißt die Projektionsebene, P das Projektionszentrum, PA der projizierende Strahl. — Die stereogr. Projektion eines Kugelkreises ist ein Kreis (Satz von H i p p a r c h), dessen Mittelpunkt die stereogr. Projektion der Spitze des Berührungskegels ist, der die Kugel längs des Kugelkreises berührt (Satz von C h a s l e s). (Der Kugelkreis und seine Projektion liegen auf einer Kugel-

fläche; ist nämlich O der Kugelmittelpunkt, Q der Gegenpunkt von P, A' die Projektion eines Punktes A des Kugelkreises, so ist: PA . PA' = PQ . PO = const. Bew. des zweiten Teils an der Schnittfigur der durch O, P und die Kegelspitze gelegten Ebene.)

† b. Die stereographischen Projektionen zweier sich schneidenden Kugelkreise schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die Kugelkreise selbst. (Schneiden die an die zwei Kugelkreise in ihrem Schnittpunkt A gezogenen Tangenten die Projektionsebene in den Punkten T und U, so läßt sich mittels II. Einl. 9. b und Bew. des Satzes a leicht zeigen, daß $\triangle$ TUA' $\cong$ TUA.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben zur Anwendung von geometrischen Örtern.

1. Auf einer geg. Kugel-, Kegel- oder Cylinderfläche einen Punkt zu finden, der a) von drei geg. Punkten — b) von drei Ebenen gleiche Entfernungen habe, c) von zwei Ebenen geg. Entfernungen habe. (II. Aufg. 1. b und 3. b.)

2. a. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche oder ein Teil derselben geg. ist. (I. Anh. 18. b.)

b. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte —

c. durch eine Kreislinie und einen außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt eine Kugelfläche zu legen.

3. Durch einen im Innern einer Kugel gelegenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei und in dem Punkt in einem geg. Verhältnis geteilt werde.

4. Durch eine geg. Gerade oder parallel einer geg. Ebene eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneide, daß der Flächeninhalt des inneren Schnittkreises halb so groß sei als derjenige des äußeren. (II. Anh. 3 u. 7. — Determination?)

5. a. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie gehe durch einen geg. Punkt, β) sie berühre eine geg. Ebene oder γ) Kugelfläche, δ) sie schneide eine geg. Ebene oder ε) Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. — Unter den drei Bedingungen, welche die Kugel erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein.

b. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend zwei von den Bedingungen β und δ der Aufg. a erfülle und außerdem eine geg. Gerade berühre oder aus ihr eine Sehne von geg. Länge ausschneide. (II. Aufg. 3. b.)

6. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen habe. (II. Anh. 11. a.)

b. Auf einer Kreislinie einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsstrecken mit zwei geg. Punkten einen rechten Winkel einschließen. (II. Anh. 10, II. Aufg. 2. b.)

7. a. Einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen vier geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben. (II. Anh. 21.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen drei geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben.

8. a. Einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß von ihm aus gesehen drei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben (d. h. daß die von ihm an die Kugeln gelegten Berührungskegel geg. Öffnungen haben). (II. Anh. 13.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben.

c. Eine Kugel zu konstr., die von vier geg. Punkten aus gesehen geg. scheinbare Größen habe. (II. Anh. 11. a.)

9. Einem Dreikant (oder regul. Vielkant) einen Kegelmantel a) umzubeschreiben, b) einzubeschreiben. (II. Anh. 35, 36 und 41. c.)

10. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von einer andern Geraden und von einem auf dieser liegenden Punkt ein geg. Verhältnis haben. (II. Aufg. 3. b.)

11. Andere Lösung von I. Aufg. 9 und I. Anh. Aufg. 27. a mittels II. Einl. 4. d.

Es ist ferner sehr lehrreich, die Aufgaben: I. Anh. Aufg. 21. a u. b, 23. a u. b, 24, 26, 28, 30. a u. b nochmals zu behandeln mit Anwendung von geom. Örtern; man kommt dabei auf die alten Lösungen. (Bei Aufg. 21. a kann entweder II. Einl. 8. d oder II. Anh. 10 verwendet werden.)

Anm. Bei den folgenden Aufgaben 12—15 benütze man II. Aufg. 6 (vgl. Zus.).

12. a. Eine gerade Linie zu ziehen, die zwei windschiefe Gerade unter geg. Winkeln schneide. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Behandlung von I. Anh. Aufg. 31 mittels II. Aufg. 6.

13. Eine Gerade zu ziehen, die gegen zwei Ebenen geg. Neigungen habe und a) durch einen geg. Punkt gehe, b) zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) schneide.

c. Zwischen zwei Ebenen eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit den Ebenen geg. Winkel mache und eine geg. Gerade schneide.

14. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit jeder einen geg. Winkel mache.

15. Eine Kegelfläche von geg. erzeugendem Winkel zu konstr., die a) durch zwei geg. sich schneidende Gerade gehe, b) zwei Ebenen berühre, so daß die Spitze in einem geg. Punkt ihrer Schnittlinie liege, c) zwei Kegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze (nach zwei Mantellinien) berühre, d) durch eine Gerade gehe und eine Ebene berühre, u. s. w. — (Die Aufg. ist analog mit II. Anh. Aufg. 5. a. Was würde den dortigen Bedingungen δ und ε entsprechen?)

16. a. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, welche α) die Mäntel zweier geg. Kegel oder zweier Cylinder oder eines Kegels und eines Cylinders — β) eine Kugel und einen Kegel- od. Cylindermantel — γ) zwei Kugeln berühre. (II. Einl. 2. d, 3. d und 9. a.)

b. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, die zwei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie habe von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung, β) sie schneide eine Kugel nach einer Sehne von geg. Länge, γ) sie habe von einer Geraden eine geg. kürzeste Entfernung. — Die Bedingungen, welche die Gerade erfüllen soll, können auch beide von der nämlichen Art sein.

17. a. Geg. zwei gleiche Strecken in bestimmter Lage im Raum. Eine Gerade zu ermitteln, um welche als Achse gedreht die eine Strecke in die Lage der andern übergeht.

b. Geg. zwei kongruente Dreiecke (Polygone) in bestimmter Lage im Raum. Einen Punkt zu finden, um welchen bewegt das eine Dreieck (Polygon) in die Lage des andern übergeführt werden kann. (Denkt man sich die zwei Polygone als Seitenflächen kongruenter Polyeder, so ist die Aufg. auch für diese gelöst.)

18. Eine Kugelfläche zu bestimmen, die vier geg. Kugelflächen rechtwinklig schneide. (II. Anh. 14.)

19. Durch einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß ihre zwischen eine geg. Kreislinie und eine geg. Kugelfläche fallende Strecke in dem Punkt nach einem geg. Verhältnis geteilt werde. (II. Anh. 18.)

20. Zwischen eine Kreislinie und eine Kugelfläche eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Geraden parallel sei.

21—40: **Berührungs-Aufgaben.**

21. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die eine geg. Kreislinie berühre.

22. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Kugel und eine geg. Ebene, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

23. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch eine geg. Kreislinie gehe und eine geg. Gerade berühre. (Man ermittle den Abstand des Berührungspunkts der Geraden von ihrem Schnittpunkt mit der Kreisebene.)

24. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Ebene und eine geg. Kugel, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

25. Einem Dreikant eine Kugel von geg. Halbmesser einzubeschreiben, so daß sie a) die Seitenflächen, b) die Kanten des Dreikants berühre. (II. Anh. Aufg. 9. b u. a.)

26. a. In einen Kugelausschnitt —

b. in den von einem sphär. Dreieck und seinem zugehörigen Dreikant begrenzten Raum eine Kugel einzubeschreiben.

27. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine geg. Kugel berühre.

28. a. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine die Kegelfläche schneidende Gerade berühre. (Der Kreis, welcher dem von der Geraden und zwei Mantellinien gebildeten Dreieck einbeschrieben wird, liegt auf der gesuchten Kugel. Oder auch mittels Ähnlichkeitspunkt.)

b. Einem Dreikant α) eine flächenberührende — β) eine kantenberührende Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine das Dreikant schneidende Gerade berühre.

29. Eine Kugel zu konstr., deren Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liege, und deren Oberfläche eine geg. Ebene berühre und durch einen geg. Punkt gehe. (Man nehme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene als Ähnlichkeitspunkt der gesuchten Kugel und einer Hilfskugel, die nur die zwei ersten Bedingungen erfüllt.)

30. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch drei geg. Punkte gehe und a) eine geg. Ebene — b) eine geg. Kugel berühre. (Analog den entsprechenden Aufg. der ebenen Geom.)

31. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch zwei geg. Punkte gehe und a) zwei geg. Ebenen — b) zwei Kugeln — c) eine Ebene und eine Kugel berühre. (Analog den entspr. Aufg. der ebenen Geom. II. Anh. 24 und 25. a.)

---

† 32. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Geraden eine gemeinschaftliche Berührungsebene an zwei Kugeln zu legen. (II. Anh. 17. b, II. Aufg. 4. b oder 5.)

† 33. An drei Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 19. — 8 Lösungen.)

† 34. An zwei Kegelflächen mit gemeinsamer Spitze eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20 giebt die einfachste Lösung. Eine andere Lösung ist angedeutet in II. Anh. Aufg. 51.)

35. An eine Kegelfläche (oder Cylinderfläche) und eine Kugel eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20.)

36. In einer Ebene durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade so zu ziehen, daß die Berührungsebenen, die durch sie an zwei auf derselben Seite der Ebene befindliche Kugeln gelegt werden, gegen die Ebene gleich geneigt seien. (Man bestimme zu einer der zwei Kugeln die symmetrische in Beziehung auf die geg. Ebene und wende II. Anh. Aufg. 32 an.)

37. Eine Ebene zu bestimmen, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: a) sie gehe durch einen geg. Punkt, b) sie sei einer geg. Geraden parallel, c) sie habe von einem Punkt eine geg. Entfernung, d) sie schneide eine Kugel nach einem Kreis von geg. Halbmesser, e) sie habe von zwei Punkten ein geg. Ver-

hältnis der Entfernungen, f) sie habe gegen eine Ebene eine geg. Neigung, g) sie habe gegen eine Gerade eine geg. Neigung. — Unter den drei Bedingungen, welche die Ebene erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein. Von den Bedingungen b, f und g dürfen jedoch nicht drei zugleich verwertet werden. (Kommt f oder g zweimal vor, so kommt II. Anh. Aufg. 34 zur Verwendung. Kommt c oder d zusammen mit f oder g vor, so benütze man einen einer Kugel umbeschriebenen Berührungskegel. Bei g ist die Gerade unter Umständen an geeigneten Ort parallel zu verschieben.)

38. Eine Ebene zu bestimmen, die eine der in der vor. Aufg. genannten Bedingungen und außerdem noch eine der folgenden erfülle: α) sie sei einer Geraden parallel und habe von ihr eine geg. Entfernung, β) sie schneide einen Cylinder nach einem Rechteck von geg. Inhalt, γ) sie schneide einen Kegel nach einem Dreieck von geg. Inhalt. (Kommt α oder β zusammen mit 37. f oder g vor, so kommt II. Aufg. 5. b zur Anwendung.)

39. Eine Ebene zu bestimmen, die eine von den Bedingungen a, c, d, e der Aufg. 37 erfülle und außerdem gegen drei geg. Gerade oder Ebenen gleich geneigt sei.

40. Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten a) geg. Verhältnisse der Entfernungen, b) gleiche Entfernungen habe. (II. Anh. 8. — Bei a erhält man 8 Lösungen. Bei b fällt eine dieser 8 Ebenen ins Unendliche.)

41—61: Sphärik und Vielkant.

41. Eine Kugel, auf welcher Meridiane und Parallelkreise in Abständen von je 15° mit N und S als Nord- und Südpol aufgezeichnet sind, wird durch eine beliebige Großkreis-Ebene in zwei Halbkugeln geteilt. Von einer derselben soll ein stereographisches Kartennetz gezeichnet werden, indem der nicht auf ihr liegende Pol P des Großkreises als Projektionszentrum genommen wird. (II. Anh. 52. — Eine in der Ebene PNS gezeichnete Hilfsfigur liefert die Projektionen N' und S' von N und S, sowie die Durchmesser der einzelnen Parallelkreis-Projektionen nach Größe und Lage. Die Meridian-Projektionen gehen in der Hauptfigur alle durch N' und S', ihre Mittelpunkte liegen auf dem Mittellot von N'S' und ergeben sich gemäß II. Anh. 52. b dadurch, daß man

an N'S' in N' die Komplemente der Winkel anlegt, die die einzelnen Meridiane mit dem durch P gehenden Meridian machen.)

42. Direkte Lösung von II. Aufg. 7. (Zwei Ebenen, die den W. α einschließen, sind durch eine dritte Ebene so zu schneiden, daß diese mit ihnen die W. β und γ macht. Mittels II. Einl. 4. e und II. Anh. Aufg. 34.)

43. Ein Dreikant zu konstr., von dem geg. sind:

a) zwei Seiten und die zur dritten gehörige Höhe (d. i. der Winkel, nach dem die betr. Höhenebene das Dreikant schneidet),

b) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe,

c) eine Seite und die zu den zwei andern gehörigen Höhen,

d) eine Seite, die zu ihr gehörige Höhe und eine weitere Höhe.

44. Auf der Oberfläche einer Kugel von geg. Halbmesser sind drei Punkte geg., deren Entfernungen mit dem Zirkel abgestochen werden mögen. Es sollen hieraus durch Konstruktion in einer Ebene die Seiten und Winkel des Dreikants gefunden werden, das von den in den drei Punkten an die Kugel gelegten Berührungsebenen gebildet wird.

45. Von einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant folgende Stücke durch Konstruktion in einer Ebene zu finden: a) die Höhen, b) die Medianen (Winkel, nach denen die Medianebenen das Dreikant schneiden), c) die seitenhalbierenden Transversalen (Winkel, nach denen die Transversalebenen schneiden), d) der erzeugende Winkel des einbeschriebenen Kegels, e) der erzeugende Winkel des umbeschriebenen Kegels. (Man lehne die Konstr. an Fig. 40. b, S. 91 an. Bei a, b und c fasse man den Körper ins Auge, der von dem Dreikant und der Ebene eines der zwei rechtw. Dreiecke AFB oder AFC eingeschlossen wird, und ermittle dessen Schnittdreieck mit der betreffenden Ebene. Bei d und e gehe man auf den Schnittpunkt der Kegelachse mit der Ebene eines jener rechtw. Dreiecke aus.)

Anm. In den folgenden Aufgaben 46—61 ist die geg. Kugel massiv vorauszusetzen, und sind die Konstruktionen auf ihrer Oberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels auszuführen (vgl. II. Aufg. 10. Anm.).

† 46. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis senkrecht zu einem geg. Großkreis zu legen. (II. Einl. 14. b.)

† 47. Von einem außerhalb eines Kleinkreises geg. Punkt

eine sphär. Tangente an den Kleinkreis zu legen. (Mittels II. Anh. Lehrs. 46, oder durch Konstr. eines Pols der sphär. Tangente mittels zweier Kreisbögen, die aus dem geg. Punkt und dem Mittelpunkt des Kleinkreises beschrieben werden.)

† 48. a. An einen Großkreis in einem geg. Punkt einen sphär. Winkel anzulegen, der gleich viel Grade habe wie ein geg. ebener Winkel. (Man bestimme durch ebene Konstr. die Länge des Äquatorbogens.)

† b. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis zu legen, der einen geg. Großkreis unter geg. Winkel schneide. (Man wende Aufg. a an und lege durch den Punkt einen Parallelkreis zu dem geg. Großkreis; oder auch mittels II. Anh. 51 und II. Anh. Aufg. 47.)

49. Zu beweisen, daß die Aufgaben: auf der Oberfläche einer massiven Kugel a) eine sphär. Entfernung zu halbieren, b) einen sphär. Winkel zu halbieren, c) einem sphär. Dreieck einen Kreis um- und d) einzubeschreiben, e) ein sphär. Dreieck zu konstr. aus drei Seiten, f) — aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, g) — aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel, — die nämlichen Auflösungen haben, wie die entsprechenden Aufgaben der ebenen Geometrie.

50. Einen Kugelkreis von geg. sphär. Halbmesser zu zeichnen, der zwei geg. Kugelkreise berühre. (Wie in der ebenen Geom.)

† 51. An zwei Kugelkreise die vier gemeinschaftlichen sphär. Tangenten zu legen. (Spezialfall der vor. Aufg. — Hiernach andere Lösung von II. Anh. Aufg. 34.)

52. Ein sphär. Dreieck zu konstr., wenn geg. sind: a) die drei Winkel, b) eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, c) zwei Winkel und eine Gegenseite. (Durch Zurückführung auf II. Anh. Aufg. 49. e—g mittels der Polardreiecke, oder direkt. Die direkte Lösung von a mittels II. Anh. 51 und vor. Aufg.)

53. Geg. zwei kongruente (oder symmetrische) sphär. Vielecke in bestimmter Lage auf der Kugeloberfläche. Einen Punkt auf ihr zu finden von der Eigenschaft, daß das eine Vieleck, wenn es in fester Verbindung mit dem Punkte gedacht, durch Drehung um ihn auf der Kugeloberfläche verschoben wird, mit dem andern Vieleck zur Deckung (bezw. in antipodische Lage) gelangt. (Das gedrehte Vieleck befindet sich in der verlangten Lage, sobald eine seiner Seiten sich darin befindet.)

8*

54. Ein sphär. Zweieck durch einen Großkreisbogen von geg. Länge zu halbieren.

55. Ein sphär. Vieleck in ein Zweieck von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Der Zweieckswinkel ist nach II. 16 gleich dem halben sphär. Exzeß des Vielecks. Konstr. des sphär. Exzesses durch Addieren der Äquatorbögen.)

56. Von einem sphär. Zweieck a) ein gleichseitiges sphär. Dreieck abzuschneiden, b) ein gleichschenkliges sphär. Dreieck abzuschneiden, das der nte Teil des Zweiecks sei. (II. Anh. 51. Bei b wird der W. an der Grundl. bestimmt nach II. 14. Zus.)

57. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem eine Seite, die zugehörige Höhe und der Inhalt geg. sind. (II. Anh. 45 u. 50.)

58. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem zwei Winkel und der Umfang geg. sind. (II. Anh. 48. a und 51.)

59. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der zwei andern Seiten,

b) eine Seite, ein anliegender Winkel und der Inhalt. (b mittels a durch das Polardreieck.)

60. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der zwei andern Seiten (II. Anh. 48. a und b, II. Anh. Aufg. 51),

b) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Inhalt (mittels a durch das Polardreieck).

61. Eine geg. Kugelfläche in ein Netz von lauter kongruenten regulären sphär. Dreiecken zu teilen, und zwar so, daß a) immer drei, b) vier, c) fünf Dreiecke mit gemeinschaftl. Ecke an einander stoßen. (Man teile die Kugeloberfläche von einem beliebigen Punkt aus in 3, 4, 5 gleiche sphär. Zweiecke und wende auf eines von ihnen II. Anh. Aufg. 56. a an.) Durch Verbinden der sphär. Mittelpunkte der Dreiecke in den Netzen b und c erhält man zwei weitere Netze, die aus lauter kongr. regul. Vierecken und Fünfecken bestehen.

Anm. Man formuliere die Aufgaben 49—53 und 56—61 und deren Lösungen für Dreikante und Kegelflächen.

Drittes Buch.

Polyeder und Umdrehungskörper.

A. Einleitung.

1: Allgemeines.

1. a. Ein von lauter ebenen Flächen begrenzter Körper heißt ein Polyeder. Die Linien, nach denen je zwei an einander stoßende Begrenzungsflächen sich schneiden, heißen die Kanten, die Punkte, in denen mehrere benachbarte Begrenzungsflächen und deren Schnittkanten zusammentreffen, heißen die Ecken des Polyeders. Die Gesamtheit der in einer Ecke zusammentreffenden Begrenzungsflächen und Kanten bildet ein Vielkant. Die Gesamtheit der in einer Begrenzungsfläche liegenden Ecken und Kanten bildet ein ebenes Vieleck. Diese Vielecke heißen die Flächen des Polyeders, ihre Gesamtheit bildet seine Oberfläche. Die Verbindungsstrecke zweier nicht in der nämlichen Begrenzungsfläche liegenden Ecken heißt eine Diagonale. Legt man durch drei oder mehr Ecken, von denen höchstens zwei in der nämlichen Begrenzungsfläche liegen, eine Ebene, so heißt deren Schnittfigur mit dem Polyeder ein Diagonalschnitt.

b. Breitet man die Oberfläche eines Polyeders als ein zusammenhängendes Stück in einer Ebene aus, nachdem man vorher den Zusammenhang der einzelnen Flächen in den Kanten, *soweit es nötig ist*, gelöst hat: so heißt die hiedurch entstandene ebene Figur ein *Netz* des Polyeders. Ein solches kann umgekehrt dazu verwendet werden, von dem Polyeder ein Modell (etwa aus Karton) herzustellen. Das Netz eines Polyeders kann in der mannigfaltigsten Weise und Form gebildet werden. Über die gestaltlichen Eigenschaften einer Netzfigur läßt sich folgendes sagen:

Da das Ausbreiten der Oberfläche eines Vielkants in einer Ebene nur dadurch möglich wird, daß man das Vielkant längs einer Kante aufschneidet, so muß man bei Herstellung eines Polyeder-Netzes an jeder Ecke mindestens längs einer Kante aufschneiden. Die aufgeschnittenen Kanten bilden den Umriß der Netzfigur, und zwar enthält der Umriß jede aufgeschnittene Kante zweimal. Da nun von jeder Polyeder-Ecke mindestens eine aufgeschnittene Kante ausgeht, so müssen auch die Polyeder-Ecken sämtlich auf dem Umriß der Netzfigur liegen; die nicht aufgeschnittenen Kanten, welche ins Innere der Netzfigur fallen, können daher immer nur eine Ecke des Umrisses mit einer andern verbinden, oder: jede nicht aufgeschnittene Kante teilt die Netzfigur in zwei getrennte Teile. *)

Anm. Es werden im folgenden nur *gewöhnliche* Polyeder in Betracht gezogen, d. h. solche, welche nachstehenden zwei Bedingungen genügen:

1) Es muß möglich sein, sämtliche Ecken des Polyeders durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug, der sich nicht selbst durchschneidet, zu verbinden, so daß also, wenn man diesen Zug vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt durchläuft, man sämtliche Ecken, und zwar jede Ecke nur einmal, passiert. **)

2) Schneidet man die Oberfläche des Polyeders nach einem der ersten Bedingung genügenden Kantenzug auf, so muß dadurch der Zusammenhang der Oberfläche in der Art gelöst sein, daß ein

---

*) Man kann hiezu Fig. 46 (S. 133) vergleichen.

**) Man kann hiezu das Polyeder Fig. 45. e (S. 130) vergleichen, wo einer der vielen möglichen Kantenzüge durch die eingeschriebenen Zahlen 1 . . . 12 angedeutet ist.

Ausbreiten derselben zu einem ebenen Netze möglich ist, ohne daß es nötig wäre, vorher noch nach einer weiteren, nicht durchlaufenen Kante aufzuschneiden.*)

Diese zwei Bedingungen treffen zu, wenn 1) das Polyeder nur einfach zusammenhängende Flächen (d. h. Flächen mit einer einzigen geschlossenen Randlinie**) besitzt, und wenn 2) die Gesamtoberfläche einfach zusammenhängend ist. (Ein Polyeder mit mehrfach zusammenhängender Oberfläche entsteht, wenn ein gewöhnliches Polyeder einfach oder mehrfach durchlocht wird.)

Ausdrücklich mag hervorgehoben werden, daß bei einem gewöhnlichen Polyeder sehr wohl auch einspringende Keile vorkommen können. — Ein Polyeder, das nur ausspringende Keile besitzt, heißt ein konvexes Polyeder.

c. Zwei Polyeder heißen kongruent, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei Polyeder heißen symmetrisch, wenn sie in solche Lage gebracht werden können, daß jede Ecke des einen zu einer entsprechenden Ecke des andern in Beziehung auf eine Ebene symmetrisch ist. Zwei kongruente Polyeder und ebenso zwei symmetrische Polyeder haben die entsprechenden Kanten, Winkel und Keile bezw. gleich; je zwei entsprechende Flächen sind kongruent; je zwei entsprechende Vielkante sind entsprechend-gleich, und zwar bei kongruenten Polyedern kongruent, bei symmetrischen symmetrisch (I. Anh. 15. a und II. Anh. 28. a). Für kongruente und symmetrische Polyeder gebraucht man die gemeinsame Bezeichnung: entsprechend-gleich.

d. Zwei Polyeder heißen ähnlich, wenn sie von gleich vielen Flächen begrenzt sind, die unter sich einzeln ähnlich und in beiden Polyedern übereinstimmend gruppiert sind, und wenn die Vielkante an je zwei entsprechenden Ecken durchweg kongruent oder durchweg symmetrisch sind; sie haben also die entsprechenden Winkel und Keile bezw. gleich, und die Kanten des einen sind den entsprechenden Kanten des

*) Fig. 46 (S. 133) stellt das auf solche Weise hergestellte Netz des Polyeders Fig. 45. e (S. 130) vor.

**) Fig. 47 (S. 133) stellt z. B. eine Fläche mit zwei Randlinien vor.

andern proportioniert. Je nachdem die Vielkante an entsprechenden Ecken kongruent oder symmetrisch sind, heißen die Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich. Zwei Polyeder, von denen jedes einem von zwei symmetrischen Polyedern gleichstimmig ähnlich ist, sind zu einander ungleichstimmig ähnlich.

2—6: Prisma.

2. a. Zieht man durch die Ecken eines ebenen Vielecks ABCD . . (Fig. 41) in beliebiger Richtung (aber nicht in der Ebene des Vielecks) Parallelen, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Parallelen Ebenen, so werden diese von einer zur Vielecksebene parallelen Ebene nach den Seiten eines zweiten Vielecks A′B′C′D′ . . geschnitten, das dem ersten kongruent ist. (Denn es sind, nach I. 2, je zwei entsprechende Vielecksseiten parallel, daher, nach I. 4. b, je zwei entsprechende Winkel gleich; ferner sind je zwei entsprechende Vielecksseiten gleich, da sie mit den parallelen Verbindungslinien ihrer Endpunkte ein Parallelogramm bilden.) Diese Parallelogramme samt den zwei Vielecken begrenzen ein Polyeder, welches Prisma heißt.

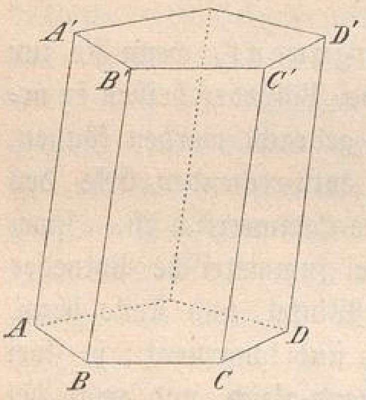


Fig. 41.

b. Ein Prisma ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus zwei kongruenten und parallel liegenden Vielecken und aus eben so vielen Parallelogrammen besteht, als jedes Vieleck Seiten hat. Die Vielecke heißen die Grundflächen, die Parallelogramme die Seitenflächen des Prismas, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet seinen Mantel. Die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen, unter sich gleichen und parallelen Kanten heißen Seitenkanten. An jeder Ecke befindet sich ein Drei=

kant. Die Entfernung der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

c. Ein Prisma heißt dreiseitig, vierseitig u. s. w., wenn seine Grundflächen Dreiecke, Vierecke u. s. w. sind.

d. Jede zu den Seitenkanten parallele Schnittebene schneidet das Prisma nach einem Parallelogramm (I. 1. a und I. 2). Insbesondere ist jeder durch zwei Seitenkanten gehende Diagonalschnitt ein Parallelogramm. Jede zu den Grundflächen parallele Schnittebene schneidet nach einem den Grundflächen kongruenten Vieleck; eine solche Schnittfigur heißt ein Parallelschnitt. Die Schnittfigur einer zu den Seitenkanten senkrechten Schnittebene heißt ein Querschnitt. Alle Querschnitte eines Prismas sind kongruent.

e. Wird der Mantel eines Prismas von einer Ebene geschnitten, die den Grundflächen nicht parallel ist, so wird dadurch das Prisma in zwei Polyeder zerlegt, von denen jedes ein schiefabgeschnittenes Prisma heißt.

3. a. Ein Prisma heißt senkrecht, wenn die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen; andernfalls heißt es schief. Im senkrechten Prisma sind die Seitenflächen und die durch je zwei Seitenkanten gehenden Diagonalschnitte Rechtecke; die Seitenkanten sind gleich der Höhe. Zwei senkrechte Prismen, die kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind kongruent; denn sie können (gemäß I. 7. a) zur Deckung gebracht werden.

b. Ein Prisma heißt regulär, wenn es senkrecht ist und reguläre Vielecke zu Grundflächen hat. Im regulären Prisma sind alle Seitenflächen kongruent und alle Dreikante kongruent. Die Strecke zwischen den Mittelpunkten der Grundflächen ist den Seitenkanten parallel u. gleich und heißt die Achse des regulären Prismas.

c. Schneidet man den Mantel eines senkrechten Prismas längs einer Seitenkante auf, wickelt ihn als zusammenhängendes Stück von dem Prisma ab, und breitet ihn in einer

Ebene aus, so legen sich in der Netz- oder Abwicklungsfigur die Grundkanten beider Grundflächen je in eine Gerade. Der Umriß der Abwicklungsfigur wird also ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Seitenkante, dessen andere Seite gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

d. Ein Cylinder kann als reguläres Prisma angesehen werden, dessen Grundflächen unendl. viele unendl. kleine Seiten haben. Daher kann der Mantel des Cylinders gleich dem Prismenmantel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet werden. Die Abwicklungsfigur ist (nach c) ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Mantellinie, dessen andere Seite gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

4. a. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (Fig. 42), heißt Parallelflach oder Spat (auch Parallelepipedon). Von seinen sechs Flächen, die alle Parallelogramme sind, sind je zwei parallel und kongruent. Jedes Paar paralleler Flächen kann als Grundflächen betrachtet werden. Von den zwölf Kanten sind je vier parallel und gleich. Es sind also drei verschiedene Kantenlängen vorhanden. Von jeder Ecke gehen drei ungleiche Kanten aus.

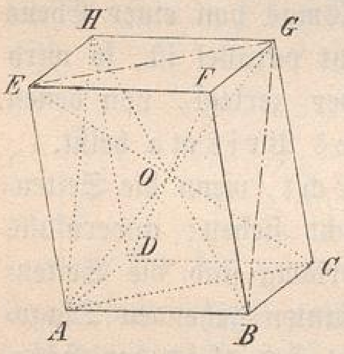


Fig. 42.

b. Zwei Ecken eines Parallelflachs, die nicht in der nämlichen Fläche liegen, heißen gegenüberliegende Ecken. Zu jeder Ecke ist nur eine gegenüberliegende vorhanden. Ihre Verbindungsstrecke ist eine Diagonale. Das Parallelflach hat vier Diagonalen. Von diesen ist jede zugleich Diagonale in zweien von den sechs Diagonalschnitt-Parallelogrammen, und je zwei sind Diagonalen in einem und demselben Diagonalschnitt. Hieraus folgt, daß sich alle vier Diagonalen in einem Punkt schneiden und gegenseitig halbieren. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Parallelflachs. (Z. B. halbieren sich in Fig. 42 AG und BH gegenseitig in O wegen Parallelogramm ABGH. CE geht ebenfalls durch O und wird in O halbiert wegen Parallelogramm ACGE, u. s. f.)

c. Die Dreikante an den acht Ecken stehen in derselben Beziehung zu einander wie die acht von drei Ebenen gebildeten Dreikante (II. Anh. 27). Insbesondere sind die Dreikante an zwei gegenüberliegenden Ecken symmetrisch.

5. a. Ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt rechtwinkliges Parallelflach oder Quader. Seine Flächen und Diagonalschnitte sind (nach 3. a) alle Rechtecke. Von den Diagonalschnitten sind je zwei kongruent. Die vier Diagonalen sind gleich. Die Dreikante an den acht Ecken sind sämtlich Oktanten.

b. Sind in einem Parallelflach drei von einer Ecke ausgehende Kanten gleich, so sind alle zwölf Kanten gleich. Das Parallelflach ist also von lauter Rhomben umgeben und heißt Rhomboeder. — Unter Rhomboeder im engeren Sinn versteht man ein solches, dessen sechs Rhomben kongruent sind. Die zwei gegenüberliegenden Ecken, in denen alsdann drei gleiche Rhombenwinkel zusammenstoßen, heißen Hauptecken, ihre Verbindungsstrecke heißt Hauptdiagonale. Das Rhomboeder heißt spitz oder stumpf, je nachdem jene drei gleichen Winkel spitz oder stumpf sind.

c. Ein Quader, der zugleich Rhomboeder ist, dessen sechs Flächen also lauter Quadrate sind, heißt Würfel (auch Kubus oder reguläres Hexaeder). Im Würfel sind alle sechs Diagonalschnitte kongruent.

6. Zwei Quader sind kongruent, wenn sie drei von einer Ecke ausgehende Kanten einzeln gleich haben (3. a). Ein Quader ist also bestimmt durch drei von einer Ecke ausgehende Kanten. Ein Würfel ist daher bestimmt durch eine Kante. — Der Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, wird als Körpereinheit oder Kubikeinheit benützt. Unter dem Rauminhalt oder Kubikinhalt

oder Volumen eines Körpers versteht man die Zahl der Kubikeinheiten, die er faßt. Zwei Körper, die gleichen Rauminhalt haben, heißen gleich.

7—10: Pyramide.

7. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks ABCD . . (Fig. 43) von einem außerhalb seiner Ebene gelegenen Punkt S Strecken, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Strecken eine Ebene, so begrenzen die in diesen Ebenen liegenden Dreiecke zusammen mit dem Vieleck ein Polyeder, welches Pyramide heißt.

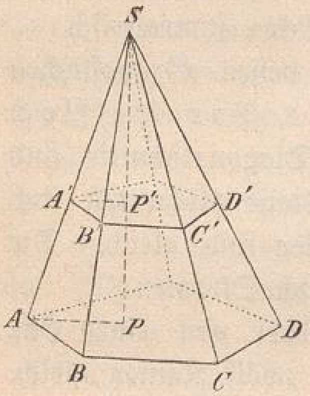


Fig. 43.

b. Eine Pyramide ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus einem Vieleck und ebenso vielen Dreiecken besteht, als das Vieleck Seiten hat. Das Vieleck heißt die Grundfläche, die Dreiecke heißen die Seitenflächen, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet den Mantel der Pyramide. Die Seiten der Grundfläche heißen Grundkanten, die übrigen, von S ausgehenden Kanten Seitenkanten. Die Ecke S heißt die Spitze, die Entfernung SP der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

c. Eine Pyramide heißt dreiseitig, vierseitig u. s. w., wenn ihre Grundfläche ein Dreieck, Viereck u. s. w. ist. — An jeder Grundecke befindet sich ein Dreikant, an der Spitze ein Vielkant, und zwar ein n-kant, wenn die Pyramide n-seitig ist. — Die dreiseitige Pyramide heißt auch Vierflach (oder Tetraeder). Im Vierflach kann jede Fläche als Grundfläche, die ihr gegenüberliegende Ecke als Spitze betrachtet werden.

d. Jede durch die Spitze gehende Schnittebene schneidet die Pyramide nach einem Dreieck. Insbesondere ist jeder durch zwei Seitenkanten gehende Diagonalschnitt ein Dreieck. Diagonalen besitzt die Pyramide nicht. — Die Schnittfigur A′B′C′D′ . . (Fig. 43) einer zur Grundfläche parallelen Schnittebene heißt ein Parallelschnitt. Es wird (in B. 10. a) bewiesen werden, daß jeder Parallelschnitt der Grundfläche ähnlich ist.

8. a. Eine Pyramide heißt regulär, wenn die Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, und die Spitze auf der Geraden liegt, die auf der Grundfläche in deren Mittelpunkt senkrecht steht. In einer regulären Pyramide sind daher die Grundkanten unter sich gleich, und die Seitenkanten unter sich gleich (I. 12. b). Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke, und die Dreikante an den Grundecken sind kongruente gleichschenklige Dreikante (II. 8). Hieraus folgt weiter, daß das Vielkant an der Spitze regulär ist, sowie daß die Seitenflächen und Seitenkanten je unter sich gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

b. Sind in einer regulären dreiseitigen Pyramide die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke (und also der Grundfläche kongruent), so heißt das Polyeder: reguläres Tetraeder oder Tetraeder im engeren Sinn.*)

c. Schneidet man den Mantel einer regulären Pyramide längs einer Seitenkante auf, wickelt ihn als zusammenhängendes Stück von der Pyramide ab, und breitet ihn in einer Ebene aus, so erhält man als Netz- oder Abwickelungsfigur ein Vieleck von der Eigenschaft, daß eine Ecke von allen übrigen eine Entfernung gleich der Seitenkante hat, und daß die Summe aller nicht an jene Ecke anstoßenden Seiten gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

d. Jeder Kegel kann als reguläre Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche unendl. viele unendl. kleine Seiten hat. Daher kann der Mantel des Kegels gleich dem

*) Im folgenden wird unter Tetraeder schlechtweg — stets das reguläre Polyeder verstanden, während die allgemeine dreiseitige Pyramide durch Vierflach bezeichnet wird.

Pyramidenmantel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet werden. Die Abwicklungsfigur ist (nach c) ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser gleich der Mantellinie, und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

9. Jedes Polyeder kann man von einem beliebigen, in seinem Innern liegenden Punkt aus in Pyramiden zerlegen, indem man von dem Punkt nach sämtlichen Ecken Strahlen zieht und den Punkt als gemeinschaftliche Spitze, die Strahlen als Seitenkanten, die einzelnen Polyederflächen als Grundflächen der Pyramiden nimmt. Die gemeinschaftliche Spitze kann auch in eine Ecke des Polyeders verlegt werden.

10. a. Eine Pyramide S, ABCD . . (Fig. 43, S. 124) wird durch einen Parallelschnitt A′B′C′D′ . . in zwei Teile zerlegt, von welchen der zwischen Grundfläche und Parallelschnitt liegende Teil: P y r a m i d e n r u m p f heißt. Die letzteren zwei Flächen, welche ähnlich sind (7. d), heißen die G r u n d f l ä c h e n, die übrigen, welche Trapeze sind, die S e i t e n f l ä c h e n, die Entfernung der Grundflächen heißt die H ö h e des Pyramidenrumpfs. Die Pyramide, die den Rumpf zur ganzen Pyramide ergänzt, heißt seine E r g ä n z u n g s - P y r a m i d e.

b. Ein Pyramidenrumpf heißt r e g u l ä r, wenn er von einer regulären Pyramide abgeschnitten ist. Im regulären Pyramidenrumpf sind die Grundflächen ähnliche reguläre Vielecke, die Seitenflächen kongruente gleichschenklige Trapeze; die Seitenkanten haben gleiche Länge.

c. Ein Kegel wird durch einen Parallelkreis in einen K e g e l r u m p f und dessen E r g ä n z u n g s k e g e l zerlegt. Der Grundkreis des ursprünglichen Kegels und der Parallelkreis heißen die G r u n d k r e i s e des Kegelrumpfes. Die Stücke der ursprünglichen Mantellinien zwischen den beiden Grundkreisen haben alle gleiche Länge und heißen die M a n t e l l i n i e n, das Stück der Achse zwischen den beiden Grundkreisen heißt die A c h s e des Kegelrumpfes. Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten Grundkreis-Durchmesser, und dessen Schenkel Mantellinien sind. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegelrumpfes ist ein Kreisring-Ausschnitt, welcher die Differenz der Abwicklungsfiguren des ganzen Kegels und des Ergänzungskegels vorstellt.

11—13: Prismatoid.

11. a. Ein Polyeder, das begrenzt ist von zwei beliebigen, in parallelen Ebenen liegenden Vielecken ABC . . und FGH . . (Fig. 44*), und außerdem von lauter Dreiecken, deren jedes mit dem einen Vieleck eine Seite, mit dem andern eine Ecke gemein hat, heißt Prismatoid. Die zwei Vielecke heißen seine Grundflächen, die Dreiecke seine Seitenflächen; die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen Kanten — Seitenkanten. Hat die eine Grundfläche m, die andere n Seiten, so hat das Prismatoid m + n Seitenflächen und m + n Seitenkanten, und heißt (m + n)-seitig. Die Entfernung der zwei parallelen Grundflächen heißt die Höhe des Prismatoids.

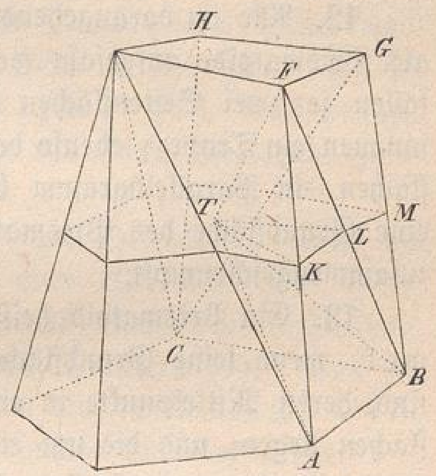


Fig. 44.

b. Ein Prismatoid ist durch die Gestalt und Lage seiner Grundflächen allein nicht vollständig bestimmt, da die Ecken noch auf die mannigfaltigste Weise durch Seitenkanten verbunden werden — und also die Seitenflächen noch die verschiedenartigsten Lagen haben können.

c. Eine durch die Mitte der Höhe parallel zu den Grundflächen gelegte Ebene halbiert sämtliche Seiten-

*) Man denke sich in Fig. 44 die von Punkt T ausgehenden Linien hinweg.

kanten (I. 14. d) und erzeugt eine Schnittfigur KLM . . (Fig. 44), welche der Mittelschnitt des Prismatoids heißt. Der Mittelschnitt ist ein $(m + n)$-eck, dessen Seiten parallel den Grundkanten und gleich ihren Hälften sind, und dessen Winkel gleich den Winkeln je zweier (in derselben oder in verschiedenen Grundflächen liegender) Grundkanten sind (I. 4. b und I. Einl. 4. d). Unter den Keilen an den Seitenkanten können sich auch einspringende Keile befinden. Daher kann der Mittelschnitt auch einspringende Winkel haben (wie z. B. an der Ecke L in Fig. 44).

12. Alle im vorangehenden betrachteten Polyeder können als Prismatoide aufgefaßt werden. Beim Pyramidenrumpf fallen je zwei Seitenflächen in eine Ebene und bilden zusammen ein Trapez; ebenso beim Prisma, wo je zwei Seitenflächen ein Parallelogramm bilden. Bei der Pyramide ist eine Grundfläche des Prismatoids zu einem Punkt (Spitze) zusammengeschrumpft.

13. Ein Prismatoid heißt regulär oder eine Trommel, wenn seine Grundflächen kongruente reguläre Vielecke sind, deren Mittelpunkte in einer Senkrechten zu den Grundflächen liegen, und die um einen halben Vieleckszentriwinkel gegen einander verdreht sind, so daß die im Zickzack laufenden Seitenkanten kongruente gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen einschließen. Der Mittelschnitt ist ein reguläres Vieleck, das doppelt so viel Seiten hat als eine Grundfläche. Im $2n$-seitigen regul. Prismatoid ist der Mittelschnitt ein regul. $2n$-eck.

14—16: Die regulären Polyeder.

14. a. Ein Polyeder heißt regulär (im engeren Sinn), wenn alle seine Flächen kongruente reguläre Vielecke sind und an allen seinen Ecken sich kongruente reguläre Vielkante befinden. Es sind also auch alle Kanten eines solchen Polyeders, alle Winkel und alle Keile je unter sich gleich. Unter den bisher betrachteten Polyedern treffen diese Eigenschaften zu beim Würfel und beim regulären Tetraeder.

b. Die Vielkante an den Ecken eines regulären Polyeders können bloß Dreikante oder Vierkante oder Fünfkante sein. Denn die Summe der Seiten eines Vielkants muß $< 4\,R$ sein (II. 17. b). Sechskante sind daher schon unmöglich, wenn die Flächen regul. Dreiecke sein sollen (weil $6 \cdot \frac{2}{3}\,R = 4\,R$). Noch weniger wären sie möglich, wenn die Flächen Quadrate, regul. Fünfecke u. s. w. sein sollten.

Die Flächen eines regulären Polyeders können bloß regul. Dreiecke oder Vierecke oder Fünfecke sein. Denn regul. Sechsecke sind schon unmöglich, wenn an den Ecken sich bloß Dreikante befinden sollen (weil $3 \cdot \frac{4}{3}\,R = 4\,R$). Noch weniger wären sie möglich, wenn sich an den Ecken Vierkante, Fünfkante u. s. w. befinden sollten.

c. Sind nun die Flächen regul. Dreiecke, so können die Vielkante entweder Dreikante oder Vierkante oder Fünfkante sein. Sind die Flächen regul. Vierecke oder Fünfecke, so können die Vielkante bloß noch Dreikante sein; denn ein Vierkant hätte schon bei Vierecken eine Seitensumme $= 4\,R$. Es kann demnach nur *fünf* reguläre Polyeder geben:

I. Dasjenige mit Dreiecken und

α) Dreikanten heißt regul. *Tetraeder* (= Vierflach),

β) Vierkanten — regul. *Oktaeder* (= Achtflach),

γ) Fünfkanten — regul. *Ikosaeder* (= Zwanzigflach).

II. Dasjenige mit Vierecken und Dreikanten heißt regul. *Hexaeder* (= Sechsflach, Würfel).

III. Dasjenige mit Fünfecken und Dreikanten heißt regul. *Dodekaeder* (= Zwölfflach).

15. Diese 5 regulären Polyeder (auch *pythagoräische* oder *platonische* Körper genannt) sind in Fig. 45 abgebildet. Tetraeder (Fig. a) und Hexaeder (Fig. b) wurden in 8. b und 5. c bereits besprochen. Zum Verständnis von Oktaeder (Fig. c), Dodekaeder (Fig. d) und Ikosaeder (Fig. e) mögen folgende Bemerkungen dienen:

a. Das Oktaeder (Fig. 45. c) kann aufgefaßt werden — entweder als reguläres sechsseitiges Prismatoid, dessen Seitenflächen regul. Dreiecke sind, oder als bestehend aus zwei kongruenten regulären vierseitigen Pyramiden, welche die quadratische Grundfläche gemeinsam haben, und deren Seitenflächen regul. Dreiecke sind.

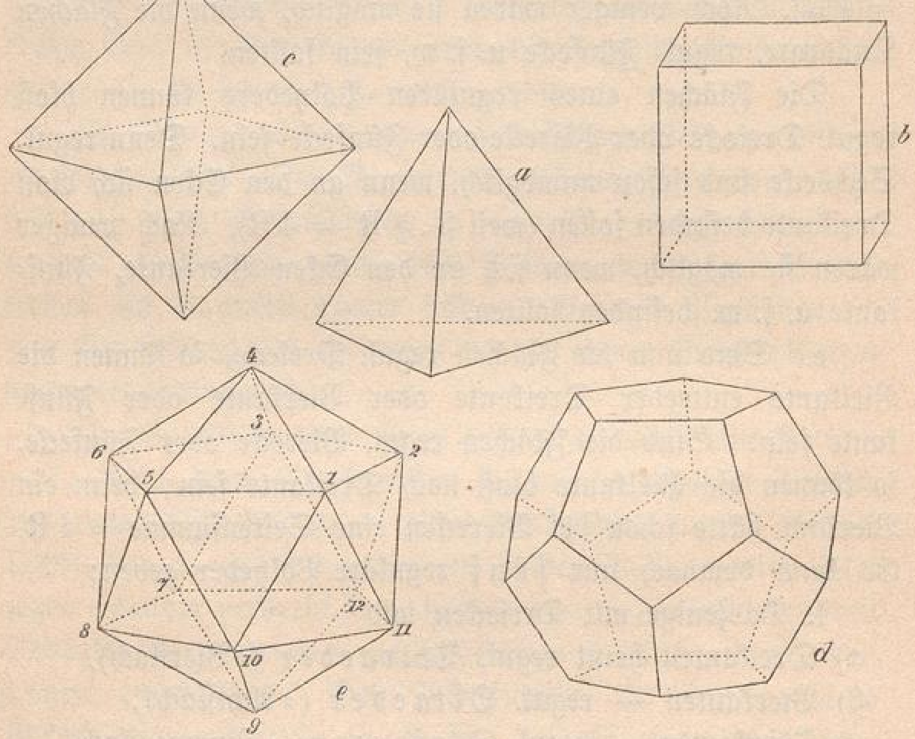


Fig. 45.
Die fünf regulären Polyeder.
a. Tetraeder, b. Hexaeder, c. Oktaeder, d. Dodekaeder, e. Ikosaeder.

b. Setzt man an jede Seite eines regul. Fünfecks ein ihm kongruentes regul. Fünfeck an, und zwar so, daß von den angesetzten Fünfecken je zwei benachbarte mit einer Seite an einander stoßen: so entsteht ein Korb-ähnliches Gebilde (Fig. 45. d). Das erste Fünfeck bildet den Boden, die fünf angesetzten Fünfecke bilden die Seitenwände des Korbes, der Rand ist eine Zickzacklinie. Würde man die Zacken geradlinig abschneiden, so würde ein regulärer fünfseitiger Pyramidenrumpf bleiben. Nimmt man nun zwei solche, einander kongruente Körbe und bringt sie in eine derartige Lage, daß die Zacken des einen in die Einschnitte des andern eingreifen, daß also die zwei Zickzacklinien sich decken: so entsteht ein Dodekaeder. — Ein Dodekaeder kann angesehen werden als bestehend aus einem regulären zehnseitigen Prismatoid und zwei kongruenten regulären fünfseitigen Pyramidenrümpfen, von denen jeder mit dem Prismatoid eine Grundfläche gemein hat. (Die zwei Pyramidenrümpfe wurden schon oben erwähnt; werden sie vom Dodekaeder weggenommen, so bleibt in der Mitte das Prismatoid, dessen Seitenflächen von den abgeschnittenen Zacken der zwei Körbe, und dessen Grundkanten von Fünfecksdiagonalen gebildet werden.)

c. Nimmt man ein reguläres zehnseitiges Prismatoid (Fig. 45. e), dessen Seitenflächen regul. Dreiecke sind, ferner zwei reguläre fünfseitige Pyramiden, deren Seitenflächen ebenfalls regul. Dreiecke, und deren Grundflächen mit den Grundflächen des Prismatoids kongruent sind, und setzt auf jede Grundfläche des Prismatoids eine der Pyramiden auf, so hat man ein Ikosaeder.

16. Außer den regulären Polyedern sind noch zu erwähnen die halbregulären Polyeder, von denen es zwei Gattungen giebt, nämlich:

a. gleicheckig-halbreguläre Polyeder (auch Archimedische Polyeder genannt), d. s. solche, deren Flächen reguläre Vielecke von zwei- oder dreierlei Art, und deren Vielkante sämtlich entsprechend-gleich (aber nicht regulär) sind,

b. gleichflächig-halbreguläre Polyeder, d. s. solche, an deren Ecken sich reguläre Vielkante von zwei- oder dreierlei Art befinden, und deren Flächen sämtlich kongruent (aber nicht regulär) sind.

B. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

Lehrsatz 1.

Eulerscher Lehrsatz: Bezeichnet man die Anzahl der Ecken eines Polyeders mit E, die der Flächen mit F, die der Kanten mit K, so ist:

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Man denke sich sämtliche Ecken des Polyeders (Fig. 45. e, S. 130) durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug 1 2 3 . . . 12, der sich nicht selbst durchschneidet, verbunden (vgl. III. Einl. 1. b. Anm., Bedingung 1). Besteht dieser Zug aus k_1 Kanten, so ist:

$$E = k_1 + 1. \qquad (1)$$

Ist k_2 die Anzahl der nicht dem Zuge angehörigen Kanten, so ist:

$$k_1 + k_2 = K. \qquad (2)$$

Man denke sich hierauf die Oberfläche des Polyeders längs jenes Kantenzuges aufgeschnitten und in einer Ebene zu einem Netze (Fig. 46) ausgebreitet (vgl. III. Einl. 1. b. Anm., Bedingung 2). Dann läßt sich leicht zeigen, daß in der Netzfigur stets die Anzahl F der Flächen um 1 größer ist als die Anzahl k_2 der Kanten, in denen die Flächen noch zusammenhängen. Aus den in III. Einl. 1. b besprochenen Eigenschaften einer Netzfigur folgt nämlich, daß die Netzfigur betrachtet werden kann als ein Band von einfach an einander gereihten Flächen, von denen unter Umständen Seitenäste abzweigen, die ebenfalls eine einfache Reihe von Flächen bilden; von den letzteren können dann wieder Nebenzweige abzweigen, u. s. f. Denkt man sich nun das Hauptband von dessen äußerster Fläche bis zur letzten durchlaufen (Weg abcde in Fig. 46), so ist die Anzahl der durchlaufenen

Flächen um 1 größer als die Anzahl der überschrittenen Kanten. Beläuft man dann noch vom Hauptband aus die einzelnen Seitenäste (Wege bf, cg, dhi), und von diesen aus — deren Nebenzweige (Weg hk): so ist die Anzahl der neu hinzukommenden Flächen jedesmal gleich der Anzahl der neu überschrittenen Kanten. Es ist somit die Anzahl der im ganzen belaufenen Flächen um 1 größer als die Anzahl der im ganzen überschrittenen Kanten, d. h:

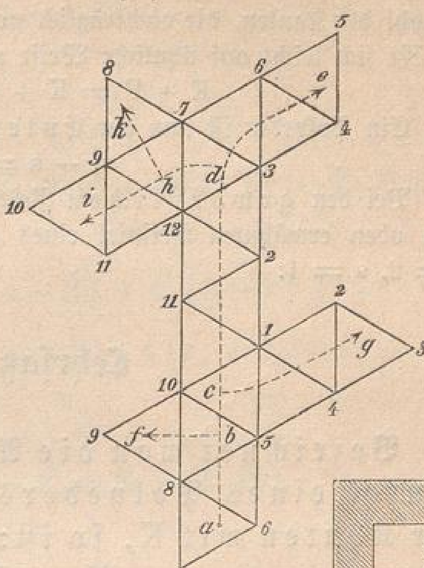


Fig. 46.

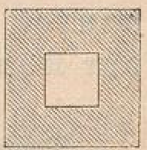


Fig. 47.

$$F = k_2 + 1. \qquad (3)$$

Addiert man (1) und (3), so folgt mit Berücksichtigung von (2):

$$E + F = K + 2.$$

Anm. Obiger Lehrsatz gilt für alle gewöhnlichen Polyeder (vgl. III. Einl. 1. b. Anm.). Auf ein außergewöhnliches Polyeder erstreckt sich der Beweis zunächst nicht. Doch giebt es auch unter ihnen „Eulersche Polyeder", d. h. solche, für welche der Satz gilt. Das Vorhandensein von mehrfach zusammenhängenden Flächen und das Mehrfachzusammenhängen der Gesamtoberfläche (III. Einl. 1. b. Anm.) kann sich nämlich unter Umständen kompensieren. Z. B. ist für ein röhrenförmiges Prisma, dessen Grundfläche durch Fig. 47 vorgestellt wird: $E = 16$, $F = 10$, $K = 24$, folglich die Eulersche Gleichung zutreffend. — Der Satz samt Beweis kann leicht verallgemeinert werden, so daß er sich auf sämtliche Klassen von Polyedern erstreckt: Ist es nämlich nicht möglich, die Ecken eines Polyeders durch einen einzigen Kantenzug zu verbinden, so nehme man mehrere getrennte Kantenzüge. Schneidet man hierauf die Polyederoberfläche nach den Kanten dieser Züge auf, und wird dadurch der Zusammenhang der Oberfläche noch nicht in der Art gelöst, daß ein Ausbreiten zu einem ebenen Netz möglich ist, so schneide man nachträglich noch nach weiteren Kanten auf (jedoch nur nach so vielen, daß man ein aus einem einzigen Stück bestehendes Netz erhält). Ist nun z die Anzahl der Kantenzüge, s die Anzahl der Kanten, die nachträglich noch durchschnitten werden mußten, so läßt sich leicht auf ähnliche Weise wie oben zeigen, daß jederzeit:

$$E + F = K + z - s + 1$$

ist. Ein Polyeder ist nun ein Eulersches, wenn

$$z - s = 1$$

ist. Bei den gewöhnlichen Polyedern ist $z = 1$, $s = o$. Bei dem oben erwähnten Beispiel eines außergewöhnlichen Polyeders ist $z = 2$, $s = 1$.

Lehrsatz 2.

Bezeichnet man die Anzahl aller Vielecks-winkel eines Polyeders mit W, die Anzahl der Kanten mit K, so ist:

$$K = \tfrac{1}{2} W.$$

Beweis. Denkt man sich sämtliche Flächen einzeln von dem Polyeder abgehoben, so ist in jeder die Anzahl der Winkel gleich der Anzahl der Seiten; die Gesamtanzahl der Winkel ist also gleich der Gesamtanzahl der Vieleckseiten. Denkt man sich dann die Vielecke wieder auf das Polyeder aufgelegt, so vereinigen sich je zwei Vieleckseiten zu einer Kante, während die Anzahl der Winkel unverändert bleibt. Somit ist: $K = \frac{1}{2} W$.

Zusatz. Da K immer eine ganze Zahl ist, so muß W immer eine gerade Zahl sein. Daher können bei einem Polyeder Flächen von ungerader Seitenzahl oder Ecken von ungerader Kantenzahl nur in gerader Anzahl vorkommen.

Lehrsatz 3.

Hat ein Polyeder E Ecken, und betragen alle seine Vieleckswinkel zusammen N Rechte, so ist:

$$N = 4(E-2).$$

Beweis. Die Oberfläche des Polyeders enthalte z_3 Dreiecke, z_4 Vierecke, z_5 Fünfecke u. s. w.; dann ist (mit

Benützung der Bezeichnungen der vorhergehenden Sätze):

$$z_3 + z_4 + z_5 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = F,$$

und

$$\begin{aligned} 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \cdot\cdot\cdot &= W \\ &= 2K \quad \text{(III. 2)}. \end{aligned}$$

Nun betragen die Winkel eines n=ecks: $2(n-2)$ Rechte, also ist:

$$\begin{aligned} N &= 2\left[z_3(3-2) + z_4(4-2) + z_5(5-2) + \cdots\right] \\ &= 2(3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \cdots) - 4(z_3 + z_4 + z_5 + \cdots) \\ &= 2.2K - 4F \\ &= 4(K-F), \end{aligned}$$

oder, da (nach III. 1) $K - F = E - 2$ ist:

$$N = 4(E-2).$$

Zusatz. Vermittels der (unabhängig von Lehrs. 1 bewiesenen) drittletzten Gleichung: $N = 4(K - F)$ ergiebt sich ein zweiter Beweis für Lehrs. 1. Projiziert man nämlich das Polyeder auf eine Ebene, die zu keiner seiner Flächen senkrecht ist, so ist die Projektion eines n=ecks wieder ein n=eck; daher ist die Summe aller Vieleckswinkel des Polyeders gleich der Summe ihrer Projektionen. Fallen nun die Projektionen von e_u Polyederecken auf den Umfang der Projektionsfigur, und die Projektionen von e_i Ecken ins Innere derselben, so ist die Summe aller Vieleckswinkel der Projektionsfigur $= 2.(e_u - 2)2R + e_i.4R = (e_u + e_i - 2).4R = (E-2)4R$; daher ist: $(E-2)4 = N = 4(K-F)$, oder: $E + F = K + 2$. — Dieser Bew. erstreckt sich jedoch nur auf konvexe Polyeder (vgl. III. Einl. 1. b. Anm.).

Lehrsatz 4.

		Flächen	Ecken	Kanten
a.	Das Tetraeder hat . .	4	4	6
b.	„ Hexaeder „ . .	6	8	12
c.	„ Oktaeder „ . .	8	6	12
d.	„ Dodekaeder „ . .	12	20	30
e.	„ Ikosaeder „ . .	20	12	30

Beweis. Das Dodekaeder (welches als Beispiel dienen mag) hat 5=ecke und 3=kante. Da in jeder Fläche 5 Kanten liegen, aber jede Kante zweien Flächen zugleich angehört, so ist:

$$K = \frac{5F}{2} \quad \text{oder:} \quad F = \tfrac{2}{5}K.$$

Da ferner von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, aber jede Kante zweien Ecken zugleich angehört, so ist:

$$K = \frac{3E}{2} \quad \text{oder:} \quad E = \tfrac{2}{3}K.$$

Setzt man nun diese Werte von F und E ein in die für alle Polyeder geltende Gleichung:

$$E + F = K + 2 \qquad \text{(III. 1)},$$

so folgt:

$$\tfrac{2}{3}K + \tfrac{2}{5}K = K + 2,$$

woraus:

$$K = 30,$$
$$F = \tfrac{2}{5} \cdot 30 = 12,$$
$$E = \tfrac{2}{3} \cdot 30 = 20.$$

Bei den übrigen Polyedern sind die Schlüsse analog.

Zusatz. Man bemerke, daß Hexaeder und Oktaeder gleiche Kantenzahl haben, und daß die Eckenzahl des einen gleich der Flächenzahl des andern ist. Man nennt daher diese zwei regul. Polyeder einander zugeordnet oder reziprok. Aus dem nämlichen Grunde sind Dodekaeder und Ikosaeder einander zugeordnet. Das Tetraeder, dessen Eckenzahl gleich der Flächenzahl ist, ist sich selbst zugeordnet.

Lehrsatz 5.

Um jedes reguläre Polyeder und in jedes reguläre Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben; beide Kugeln sind konzentrisch.

Beweis. Es seien P und Q (Fig. 48) die Mittelpunkte zweier benachbarten Flächen eines regulären Polyeders; M sei der Mittelpunkt der Kante AB, in der sie an einander ſtoßen. Errichtet man auf den zwei Flächen in P und Q die Senkrechten, ſo müſſen dieſe ſich ſchneiden, da ſie (nach I. 8. a und c) beide in der Mittellotebene von AB (Ebene durch MP und MQ) liegen. Der Schnittpunkt O hat nun (nach I. 12. b) von ſämtlichen Ecken der zwei Flächen gleiche Entfernung, iſt folglich der Mittelpunkt der dieſen zwei Flächen umbeſchriebenen Kugel. Zieht man ferner OM, ſo iſt $\triangle$ OPM $\cong$ OQM (weil PM = QM), folglich iſt OP = OQ. Punkt O hat alſo auch von den zwei Flächen gleiche Entfernung. — Iſt hierauf R der Mittelpunkt einer dritten Fläche des regul. Polyeders, welche mit der Fläche P die Kante CD gemein hat: ſo iſt das aus den Flächen P und R beſtehende Gebilde dem aus den Flächen P und Q beſtehenden Gebilde kongruent. Daher muß auch die den Flächen P und R umbeſchriebene Kugel den gleichen Halbmeſſer — und ihr Mittelpunkt O′ die gleiche Entfernung von beiden Flächen haben wie bei dem erſten Gebilde. Nun liegt O′ wieder auf der in P errichteten Senkrechten, alſo muß, weil PO′ = PO iſt, O′ mit O zuſammenfallen. — In gleicher Weiſe kann man dann zu einer vierten Fläche u. ſ. f. übergehen und der Reihe nach beweiſen, daß die zuerſt gefundene Kugelfläche auch durch ſämtliche übrigen Ecken des Polyeders geht, ſowie daß ihr Mittelpunkt von ſämtlichen Flächen gleich weit entfernt iſt, daß folglich eine aus O mit Halbmeſſer OP beſchriebene Kugel ſämtliche Flächen berührt.

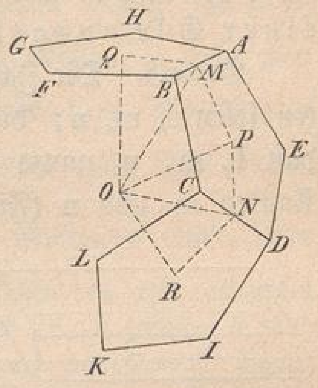


Fig. 48.

Zuſatz. Die einbeſchriebene Kugel berührt die Flächen in ihren Mittelpunkten.

6—16: **Berechnung von Prisma, Pyramide, Prismatoid, u. s. w.**

Lehrsatz 6.

Die Zahl der Kubikeinheiten, die ein Quader enthält, ist gleich dem Produkt aus den Zahlen der Längeneinheiten dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

Beweis. Die Zahlen der Längeneinheiten der drei Kanten seien l, m, n; die Längeneinheit sei so klein gewählt, daß l, m, n ganze Zahlen seien. Das Rechteck mit den Kanten m und n (Fig. 49), das als Grundfläche angesehen werde, enthält mn quadratische Flächeneinheiten. Denkt man sich auf jede derselben einen Würfel gleich der Kubikeinheit gestellt, so bildet die Gesamtheit dieser Würfel einen Teil-Quader Q, dessen Höhe eine Längeneinheit, und dessen Inhalt mn Kubikeinheiten beträgt. Teilt man nun die dritte Kante in l Längeneinheiten und legt durch jeden Teilpunkt einen Parallelschnitt, so wird dadurch der ursprüngliche Quader in l Teil-Quader geteilt, die alle dem Quader Q kongruent sind (III. Einl. 6), also je mn Kubikeinheiten enthalten. Folglich enthält der ganze ursprüngliche Quader l . mn Kubikeinheiten.

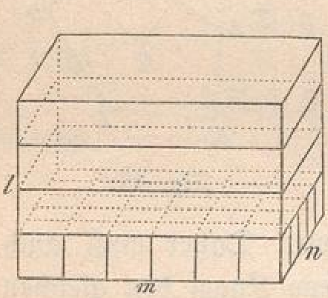


Fig. 49.

Zusatz 1. Kürzer drückt man den Lehrs. so aus: Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt aus drei von einer Ecke ausgehenden Kanten. Bezeichnet man also den Inhalt mit K, die Kantenlängen mit l, m, n, so ist:

$$K = l . m . n.$$

Zusatz 2. Ist a die Kante eines Würfels, so ist (nach Zus. 1):

$$K = a^3.$$

Ist die Längeneinheit das Meter, so ist die Kubikeinheit das Kubikmeter; da seine Kante 10 Dezimeter enthält, so enthält das

Kubikmeter 1000 Kubikdezimeter, ebenſo das Kubikdezimeter 1000 Kubikcentimeter u. ſ. w.

Anm. Der in Zuſ. 1 ausgeſprochene Satz iſt zunächſt nur für den Fall bewieſen, daß l, m, n ganze Zahlen ſind; er iſt jedoch auch für den Fall von gebrochenen und von irrationalen Zahlen gültig. Sind nämlich l, m, n urſprünglich gebrochene rationale Zahlen, ſo kann man die Längeneinheit ſtets nachträglich ſo klein wählen, daß die Maßzahlen für die Kanten ganze Zahlen werden. Iſt z. B. $l = \frac{\mathfrak{l}}{10}$ Millim., $m = \frac{\mathfrak{m}}{10}$ Millim., $n = \frac{\mathfrak{n}}{10}$ Millim., ſo wählt man ein Zehntelsmillimeter als Längeneinheit, und hat dann: $K = \mathfrak{l} \,.\, \mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{n}$ Kub.-Zehntelsmillim. $= \frac{\mathfrak{l} \,.\, \mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{n}}{1000}$ Kub.-Millim. (nach Zuſ. 2) $= \frac{\mathfrak{l}}{10} \cdot \frac{\mathfrak{m}}{10} \cdot \frac{\mathfrak{n}}{10}$ Kub.-Millim. $= l \,.\, m \,.\, n$ Kub.-Millim. — Sind ferner l, m, n irrationale Zahlen, und liegt l zwiſchen den zwei rationalen Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$*), ebenſo m zwiſchen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, n zwiſchen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$: ſo muß K zwiſchen den zwei Werten $\mathfrak{l}.\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{l}'.\mathfrak{m}'.\mathfrak{n}'$ liegen; zwiſchen denſelben Werten liegt auch das Produkt l.m.n. Es können nun die zwei Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ einander ganz beliebig nahe genommen werden, ſo daß der Unterſchied zwiſchen den zwei Werten $\mathfrak{l}.\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{l}'.\mathfrak{m}'.\mathfrak{n}'$ beliebig klein wird.

Lehrſatz 7.

a. Jedes ſchiefe Prisma iſt gleich einem ſenkrechten Prisma, deſſen Höhe gleich der Seitenkante, und deſſen Grundfläche gleich dem Querſchnitt des ſchiefen Prismas iſt.

b. Jedes Parallelflach wird durch einen Diagonalſchnitt halbiert.

Beweis. a. Das ſchiefe Prisma ſei ABC.., A′B′C′.. (Fig. 50). Zwei zu den Seitenkanten AA′, BB′,.. ſenkrechte Ebenen, deren Entfernung = AA′ iſt, mögen den Prismenmantel, bezw. deſſen Verlängerung nach den Viel-

*) Iſt z. B. $l = \sqrt{2} = 1{,}41421\,..$, ſo liegt l zwiſchen den zwei rationalen Zahlen $\mathfrak{l} = 1{,}41421$ und $\mathfrak{l}' = 1{,}41422$.

ecken DEF.. und D′E′F′.. schneiden; dann ist DEF.., D′E′F′.. das senkrechte Prisma, dessen Höhe gleich der Seitenkante, und dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt des schiefen Prismas ist. Nun ist DD′ = AA′, also auch AD = A′D′, ebenso BE = B′E′, CF = C′F′, u. s. f.; da diese Strecken auf den kongruenten Vielecken DEF.. und D′E′F′.. senkrecht stehen, so können (gemäß I. 7. a) die zwei Polyederstücke DEF.., ABC.. und D′E′F′.., A′B′C′.. zur Deckung gebracht werden und sind also gleich. Fügt man zu jedem das Stück DEF.., A′B′C′.. hinzu, so folgt: Prisma ABC.., A′B′C′.. = DEF.., D′E′F′...

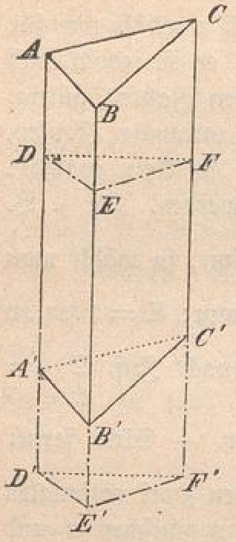


Fig. 50.

Anm. Sollte es nicht möglich sein, einen Querschnitt DEF.. zu legen, der ganz innerhalb des schiefen Prismas fällt, so bringe man beide Querschnitte DEF.. und D′E′F′.. an der Verlängerung des Prismenmantels an. Das schiefe und das senkrechte Prisma stellen sich dann als Differenzen gleicher Polyederstücke dar.

b. Ist ABCD, A′B′C′D′ (Fig. 51) ein schiefwinkliges Parallelflach, und ist EFGH ein zur Kante AA′ senkrechter Querschnitt desselben, so ist EFGH (nach I. 2) ein Parallelogramm, das durch die Diagonale FH in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird. Nun sind (nach a) die zwei schiefen dreiseitigen Prismen ABD, A′B′D′ und CDB, C′D′B′, in die das Parallelflach durch den Diagonalschnitt BDD′B′ zerlegt wird, einzeln gleich den senkrechten Prismen, deren Grundflächen jene zwei kongruenten Dreiecke, und deren Höhen gleich AA′ sind. Diese senkrechten Prismen aber sind kon-

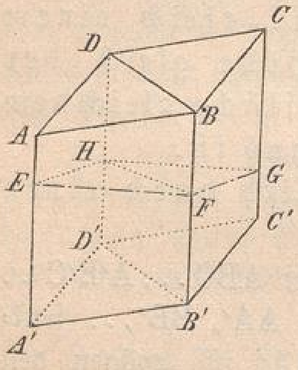


Fig. 51.

gruent (nach III. Einl. 3. a); folglich sind auch die schiefen Prismen einander gleich.

Lehrsatz 8.

a. Zwei Parallelflache, die eine Grundfläche gemein haben, und deren andere Grundflächen in derselben Ebene liegen, sind gleich.

b. Jedes Parallelflach läßt sich in einen Quader von inhaltsgleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln.

c. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. a. ABCD (Fig. 52) sei die gemeinschaftliche

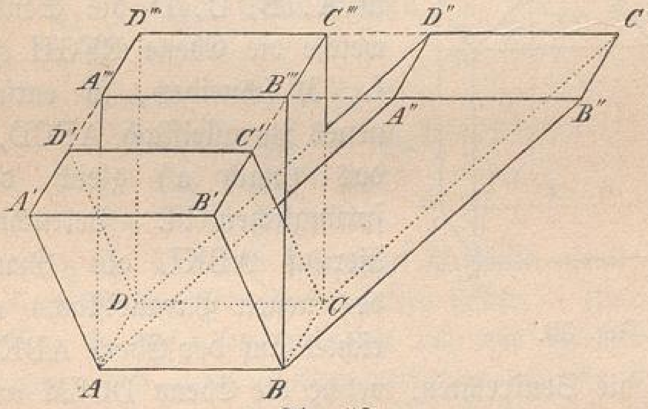


Fig. 52.

Grundfläche der zwei Parallelflache, A′B′C′D′ und A″B″C″D″ seien die zwei andern Grundflächen, die in der nämlichen Ebene liegen und kongruent sind. Verlängert man die Seiten A′D′, B′C′ und B″A″, C″D″ bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt, so entsteht in derselben Ebene ein drittes Parallelogramm A‴B‴C‴D‴, das mit den zwei vorigen — und also auch mit ABCD kongruent ist. Weiter sind die Verbindungsstrecken der entsprechenden Ecken von A‴B‴C‴D‴ und ABCD parallel, (denn es ist z. B. AA‴ ∥ BB‴, weil AB ⧺ A‴B‴). Daher ist ABCD, A‴B‴C‴D‴ ebenfalls ein Parallelflach. — Nun sind die zwei dreiseitigen Prismen AA′A‴, BB′B‴ und DD′D‴, CC′C‴ gleich, da sie zur Deckung gebracht werden können, (denn bringt man die kongr. Grundflächen AA′A‴ und DD′D‴ zur Deckung, so müssen sich, nach II. Anh. 27, auch die Seitenkanten decken). Subtrahiert man jedes dieser dreiseitigen Prismen von dem vierseitigen Prisma ADD‴A′, BCC‴B′, so bleibt: Parallelflach ABCD, A‴B‴C‴D‴ = ABCD, A′B′C′D′. Ebenso beweist man, daß ABCD, A‴B‴C‴D‴ = ABCD, A″B″C″D″ ist. Folglich ist auch ABCD, A′B′C′D′ = ABCD, A″B″C″D″.

b. ABCD, EFGH (Fig. 53) sei ein schiefwinkliges Parallelflach. Errichtet man auf der Ebene des als Grundfläche betrachteten Parallelogramms ABCD in A, B, C, D die Senkrechten, welche die Ebene EFGH in I, K, L, M schneiden, so entsteht ein neues Parallelflach ABCD, IKLM, das (nach a) gleich dem ursprünglichen ist. Betrachtet man hierauf ABKI als Grundfläche des neuen Parallelflachs und errichtet auf der Ebene ABKI in A, B, K, I die Senkrechten, welche die Ebene DCLM in O, N, P, Q schneiden, so entsteht ein drittes Parallelflach ABKI, ONPQ, das (nach a) gleich dem vorigen und also auch gleich dem ursprünglichen ist. Dieses dritte Parallelflach ist aber nach der Konstruktion ein Quader. Betrachtet man in ihm ABNO als Grundfläche, so ist diese gleich der Grundfläche ABCD des ursprünglichen Parallelflachs, und es sind die zugehörigen Höhen in Quader und Parallelflach gleich.

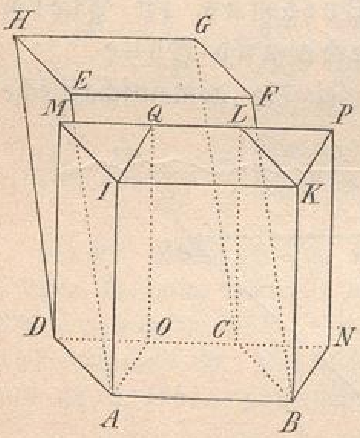


Fig. 53.

c. Die Grundfläche ABCD des Parallelflachs ABCD, EFGH (Fig. 53) sei = G, die zugehörige Höhe = h; dann ist:

Parallelfl. ABCD, EFGH $=$ ABNO, IKPQ (nach b)
$=$ AB . AO . AI (III. 6)
$=$ G . h.

Folglich ist der Satz bewiesen für ein Parallelflach.

Hat man ferner ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $=$ G, Höhe $=$ h ist: so ergänze man das Prisma zum Parallelflach, indem man seine dreieckige Grundfläche zum Parallelogramm ergänzt. Das letztere ist dann $= 2\,G$, folglich das Parallelflach $= 2\,G . h$. Der Inhalt des dreiseitigen Prismas ist aber halb so groß (III. 7. b), also $= G . h$.

Ein mehrseitiges Prisma endlich, dessen Grundfläche $=$ G, Höhe $=$ h, Inhalt $=$ K ist, läßt sich durch Diagonalschnitte, die durch eine Seitenkante gelegt werden, in lauter dreiseitige Prismen von der Höhe h zerlegen. Sind nun g_1, g_2, g_3 . . . ihre Grundflächen, k_1, k_2, k_3 . . . ihre Inhalte, so ist:

$$\begin{aligned} K &= k_1 + k_2 + k_3 + \dots \\ &= g_1 h + g_2 h + g_3 h + \dots \\ &= (g_1 + g_2 + g_3 + \dots) h \\ &= G . h. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Demnach sind zwei Prismen gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. — Zwei Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und zwei Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. — In zwei gleichen Prismen verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und: verhalten sich in zwei Prismen die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen, so sind sie gleich.

Zusatz 2. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Querschnitt und Seitenkante (III. 7. a).

Lehrsatz 9.

Ist der Halbmesser eines Cylinders $=$ r, seine Höhe $=$ h, so ist

a. der Inhalt: $K = r^2 \pi h$,
b. der Mantel: $M = 2 r \pi h$,
c. die Oberfläche: $O = 2 r \pi (r + h)$.

Beweis. a. Der Cylinder kann als Prisma betrachtet werden, dessen Grundfläche $= r^2 \pi$ ist (III. Einl. 3. d). Daher ist sein Inhalt (III. 8. c):

$$K = r^2 \pi h.$$

b. Der Mantel ist (nach III. Einl. 3. d) gleich einem Rechteck, dessen eine Seite $= 2 r \pi$, dessen andere Seite $= h$ ist; folglich ist:

$$M = 2 r \pi h.$$

c. Die Oberfläche setzt sich zusammen aus dem Mantel und den zwei Grundkreisen; folglich ist:

$$\begin{aligned} O &= 2 r \pi h + 2 r^2 \pi \\ &= 2 r \pi (r + h). \end{aligned}$$

Zusatz 1. Die Oberfläche eines Cylinders ist (nach c) gleich dem Mantel eines um den Halbmesser erhöhten Cylinders. — Ist bei einem Cylinder die Höhe gleich dem Halbmesser, so ist sein Mantel gleich der Summe der zwei Grundflächen oder gleich der Hälfte der Oberfläche.

Zusatz 2. Bezeichnet man bei einer cylindrischen Röhre die Höhe mit h, die Halbmesser der zwei konzentrischen Grundkreise mit R und r, die Dicke mit d, so ist der (massive) Inhalt der Röhre:

$$\begin{aligned} K &= (R^2 - r^2) \pi h = (R + r)(R - r) \pi h \\ &= (2 r + d) d \pi h. \end{aligned}$$

Lehrsatz 10.

a. Jeder Parallelschnitt einer Pyramide ist ein ihrer Grundfläche ähnliches Vieleck.

b. Parallelschnitt und Grundfläche verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Entfernungen — oder der Entfernungen entsprechender Ecken — von der Spitze der Pyramide.

Beweis. **a.** Die Pyramide sei S,ABCD . . (Fig. 54), der Parallelschnitt sei A′B′C′D′ . . . Nach I. 2 sind je zwei entsprechende Seiten des Parallelschnittes und der Grundfläche parallel, daher (nach I. 4. b) je zwei entsprechende Winkel gleich. Ferner folgt aus der Parallelität der Seiten: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SC} = \frac{C'D'}{CD}$ u. s. f. Die zwei Vielecke haben also die Winkel einzeln gleich und die entsprechenden Seiten proportioniert, sind folglich ähnlich.

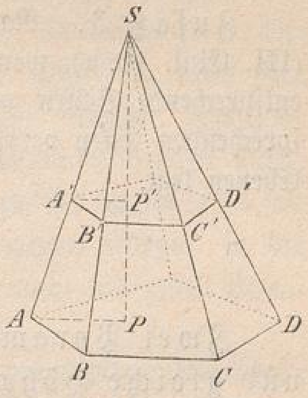


Fig. 54.

b. Sind SP und SP′ die Entfernungen der Spitze von der Grundfläche und vom Parallelschnitt, so ist: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SP'}{SP}$ (I. 14. Zus. 3). Da nun A′B′C′D′ . . $\backsim$ ABCD . . , so ist:
$$\frac{A'B'C'D' ..}{ABCD ..} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{SA'^2}{SA^2} = \frac{SP'^2}{SP^2}.$$

Zusatz 1. Beide Sätze bleiben gültig, auch wenn die mit der Grundfläche parallele Schnittebene nicht die Kanten selbst, sondern deren Verlängerungen über die Spitze schneidet. Es sind dann die einzelnen Seiten der Schnittfigur mit den entsprechenden Seiten der Grundfläche parallel und entgegengesetzt-gerichtet.

Zusatz 2. Satz a gilt auch umgekehrt: Liegen zwei ähnliche Vielecke ähnlich, d. h. so, daß ihre entsprechenden Seiten parallel sind, so schneiden sich die Verbindungslinien sämtlicher Paare entsprechender Ecken in einem Punkt, welcher der Ähnlichkeitspunkt der zwei Vielecke heißt. Seine Entfernungen von je zwei entsprechenden Ecken verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten. Je nachdem die entsprechenden Seiten gleich- oder entgegengesetzt-gerichtet sind, liegt der Ähnlichkeitspunkt außerhalb der Verbindungsstrecken der entsprechenden Ecken oder innerhalb, und heißt demgemäß äußerer Ähnlichkeitspunkt oder innerer Ähnlichkeitspunkt.

Zusatz 3. Nach Zus. 2 entsteht ein Pyramidenrumpf (III. Einl. 10. a), wenn man von zwei ähnlichen Vielecken, deren entsprechende Seiten parallel und gleich-gerichtet sind, die entsprechenden Ecken verbindet und durch die entsprechenden Seiten Ebenen legt.

Lehrsatz 11.

Zwei Pyramiden, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind an Raum gleich.

Beweis. Die zwei Pyramiden (Fig. 55) können zwischen

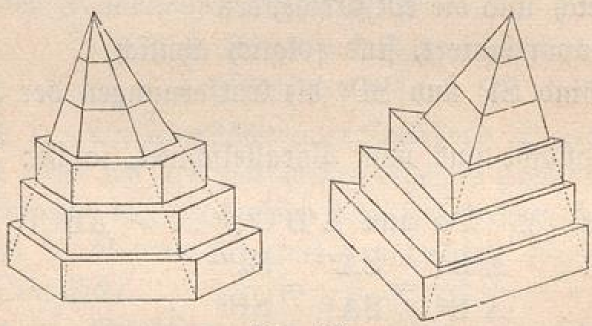


Fig. 55.

zwei parallele Ebenen gelegt werden, so daß die Grundflächen in der einen, die Spitzen in der andern liegen. Teilt man dann die Pyramidenhöhe H in n gleiche Teile und legt durch jeden Teilpunkt eine zu jenen Ebenen parallele Ebene, so erzeugt jede derselben in den zwei Pyramiden Parallelschnitte von gleicher Größe. Denn sind die Grundflächen = G und G′, die Parallelschnitte = g und g′, und ist deren Entfernung von den Spitzen = h, so ist: $\frac{g}{G} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{g'}{G'}$, (III. 10. b); da aber $G = G'$, so ist auch $g = g'$. — Man denke sich nun in jeder Pyramide zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Parallelschnitt-Ebenen ein senkrechtes Prisma errichtet, dessen Grundfläche immer der größere der zwei Parallelschnitte sei; dadurch entstehen zwei aus je n Prismen zusammengesetzte staffelförmige Körper, deren Kerne die zwei Pyramiden bilden. Jedes Prisma der einen Pyramide ist (nach III. 8. Zus. 1) gleich dem zwischen denselben Parallelebenen liegenden Prisma der andern Pyramide; also sind auch ihre Summen, d. h. die zwei staffelförmigen Körper einander gleich. Dies gilt, wie groß auch n genommen werden mag; die zwei Körper sind also auch noch gleich, wenn $n = \infty$ wird. Dann aber gehen die staffelförmigen Körper in die Pyramiden selbst über; folglich sind auch die zwei Pyramiden gleich.

Zusatz. Der obige Beweis kann unmittelbar übertragen werden auf zwei Körper von irgend welcher andern Form, so daß man den allgemeinen Satz hat (Satz des Cavalieri): Liegen zwei Körper zwischen denselben zwei parallelen Ebenen, und werden sie von jeder beliebigen dritten Ebene, die den zwei ersten parallel ist, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so sind sie an Raum gleich. Es sind ferner nicht bloß die ganzen Körper gleich, sondern auch irgend zwei Schichten derselben, die zwischen den nämlichen Parallelschnitt-Ebenen liegen. — Auch wenn die Schnittfiguren keine Vielecke, sondern krummlinige Figuren (z. B. Kreise) sind, bleibt der Satz gültig; denn jede krummlinige Figur kann als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten angesehen werden.

Lehrsatz 12.

a. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleiche Pyramiden zerlegen.

b. Der Inhalt einer Pyramide ist der dritte Teil des Inhaltes eines Prismas, das gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

c. Der Inhalt einer Pyramide ist der dritte Teil des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. a. Das dreiseitige Prisma sei ABC, A'B'C'

(Fig. 56). Legt man durch die drei Ecken A, B′, C eine Ebene, so schneidet diese von dem Prisma eine dreiseitige Pyramide B′, ABC ab, und es bleibt eine vierseitige Pyramide übrig, deren Spitze B′, und deren Grundfläche das Parallelogramm AA′C′C ist. Diese vierseitige Pyramide wird durch den Diagonalschnitt AC′B′ in zwei dreiseitige Pyramiden B′, AA′C′ und B′, C′CA zerlegt, welche gleiche Grundflächen AA′C′ = C′CA und gemeinschaftliche Spitze B′, also gleiche Höhen haben, und daher an Raum gleich sind (III. 11). Um weiter zu beweisen, daß auch die zuerst abgeschnittene Pyramide B′, ABC gleich einer der zwei letzteren, z. B. gleich B′, C′CA ist, betrachte man in beiden die Ecke A als Spitze; dann haben sie gleiche Grundflächen CBB′ = B′C′C und gemeinschaftliche Spitze A, sind folglich gleich (III. 11). Das Prisma ist somit in drei gleiche Pyramiden zerlegt; jede Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Prismas.

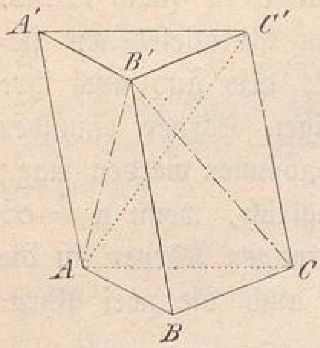


Fig. 56.

b. Die Pyramide sei A′, ABCD . . (Fig. 57). Man lege durch A′ eine Ebene parallel zur Grundfläche und ziehe durch B, C, D . . die Parallelen zu AA′, welche die Ebene schneiden in B′, C′, D′ . . . Dadurch entsteht ein Prisma ABCD . . , A′B′C′D′ . . , das dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe wie die Pyramide hat. Die durch AA′ gelegten Diagonalebenen des Prismas sind auch Diagonalebenen der Pyramide und teilen sie in lauter dreiseitige Pyramiden. Von diesen ist jede (nach a) der dritte Teil des dreiseitigen Prismas, das mit ihr die nämliche Grundfläche hat. Daher ist auch die Summe aller Pyramiden der

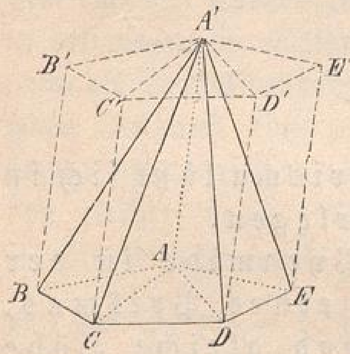


Fig. 57.

dritte Teil der Summe aller Prismen, oder: Pyramide $A', ABCD\ldots = \frac{1}{3}$ Prisma $ABCD\ldots, A'B'C'D'\ldots$ Dann aber ist die Pyramide auch der dritte Teil jedes andern Prismas, das gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat (III. 8. Zus. 1).

c. Ist der Inhalt der Pyramide $= K$, die Grundfläche $= G$, die Höhe $= h$, so ist der Inhalt eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe $= G\,h$ (III. 8. c), folglich (nach b) der Inhalt der Pyramide:

$$K = \tfrac{1}{3} G\,h.$$

Zusatz 1. Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. — Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und zwei Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. — In zwei gleichen Pyramiden verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und: zwei Pyramiden sind gleich, wenn sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

Zusatz 2. In zwei ähnlichen Pyramiden sind sämtliche Paare entsprechender Strecken proportioniert. Sind daher die Grundflächen $= G$ und G', die Höhen $= h$ und h', und irgend zwei entsprechende Strecken $= a$ und a', so ist:

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \text{ und } \frac{G}{G'} = \frac{a^2}{a'^2}; \text{ daher: } \frac{K}{K'} = \frac{\frac{1}{3}G\,h}{\frac{1}{3}G'h'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

D. h.: Die Inhalte ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Kuben entsprechender Strecken.

Zusatz 3. Hat man zwei ähnliche Polyeder und zerlegt sie von zwei entsprechenden Ecken aus in Pyramiden (III. Einl. 9), so sind von diesen je zwei entsprechende ähnlich; Zus. 2 gilt also für je zwei entsprechende Pyramiden, folglich auch für ihre Summen, d. h.: Die Inhalte ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Kuben entsprechender Strecken. — Da ferner die Flächeninhalte je zweier entsprechenden Flächen sich verhalten wie die Quadrate entsprechender Strecken, so gilt dies auch für ihre Summen, d. h.: Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken. Dies gilt sowohl für Polyeder, die gleichstimmig ähnlich, als für solche, die ungleichstimmig ähnlich sind. Namentlich folgt: Zwei symmetrische Polyeder haben gleichen Rauminhalt und gleiche Oberfläche.

Lehrsatz 13.

Ist der Halbmesser des Grundkreises eines Kegels $= r$, seine Höhe $= h$, seine Mantellinie $= s$, so ist

a. der Inhalt: $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$,

b. der Mantel: $M = r\pi s = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$,

c. die Oberfläche: $O = r\pi(r + s)$.

Beweis. a. Der Kegel kann als Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche $= r^2\pi$ ist (III. Einl. 8. d). Daher ist sein Inhalt (III. 12. c):

$$K = \tfrac{1}{3} r^2 \pi . h.$$

b. Der Mantel des Kegels wird bei der Abwicklung ein Kreisausschnitt (III. Einl. 8. d), dessen Halbmesser $= s$, und dessen Bogen $= 2r\pi$ ist. Somit ist:

$$M = \frac{2r\pi . s}{2} = r\pi s,$$

oder, da $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ist:

$$M = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}.$$

c. Die Oberfläche ist gleich Grundkreis plus Mantel, also:

$$O = r^2\pi + r\pi s$$
$$= r\pi(r + s).$$

Lehrsatz 14.

Sind die Grundflächen eines Pyramidenrumpfes $= G$ und G', und ist seine Höhe $= h$, so ist sein Inhalt:

$$K = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{GG'} + G'\right).$$

Beweis. Ergänzt man den Pyramidenrumpf ABC . ., A′B′C′ . . (Fig. 54, S. 145) zur Pyramide und bezeichnet die Höhe SP der ganzen Pyramide mit x, die Höhe SP′ der Ergänzungspyramide mit y, so hat man zur Bestimmung von x und y die zwei Gleichungen:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G'}} \qquad \text{(III. 10. b)},$$

$$x - y = h.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad \frac{y}{h} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$

$$x = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad y = h\frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}.$$

Nun ist (nach III. 12. c):

$$K = \frac{Gx}{3} - \frac{G'y}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\,\frac{G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$

$$= \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{GG'} + G'\right).$$

Zusatz. Demnach sind zwei Pyramidenrümpfe gleich, wenn ihre Grundflächen und Höhen bezw. gleich sind.

Lehrsatz 15.

Die Halbmesser der Grundkreise eines Kegelrumpfes seien $= r$ und r', seine Mantellinie sei $= s$, die Strecke des Mittellotes der Mantellinie zwischen dieser und der Achse $= p$; dann ist

a. der Inhalt: $K = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rr' + r'^2\right)$, (1)

b. der Mantel: $M = (r + r')\pi s$, (2)

oder $M = 2p\pi h$. (3)

Beweis. a. Der Kegelrumpf kann als Pyramidenrumpf angesehen werden, in welchem $G = r^2\pi$, $G' = r'^2\pi$, also $\sqrt{GG'} = r r'\pi$ ist. Daher ist (nach III. 14):

$$K = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + r r' + r'^2\right). \qquad (1)$$

b. Ergänzt man den Kegelrumpf zum Kegel und bezeichnet die Mantellinie des ganzen Kegels mit x, diejenige des Ergänzungskegels mit y, so ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{r'}$$

$$x - y = s,$$

woraus folgt:

$$\frac{x}{s} = \frac{r}{r - r'} \qquad \frac{y}{s} = \frac{r'}{r - r'}$$

$$x = s\frac{r}{r - r'} \qquad y = s\frac{r'}{r - r'}.$$

Nun ist (nach III. 13. b):

$$M = r\pi x - r'\pi y = s\pi\frac{r^2 - r'^2}{r - r'}$$

$$= (r + r')\pi s. \qquad (2)$$

Ist ferner ABB'A' (Fig. 58) der halbe Achsenschnitt des Kegelrumpfes ($AB = r$, $A'B' = r'$, $AA' = h$, $BB' = s$), und errichtet man auf BB' in N das Mittellot, das die Achse AA' in P schneidet, so ist $NP = p$. Fällt man $B'C \perp AB$ und $NM \perp AA'$, so ist $\triangle MNP \backsim CB'B$, daher: $\frac{MN}{NP} = \frac{CB'}{B'B}$, oder: $\frac{\frac{1}{2}(r + r')}{p} = \frac{h}{s}$, $(r + r')s = 2ph$.

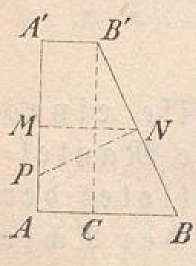


Fig. 58.

Dies eingesetzt in (2) giebt:

$$M = 2p\pi h. \qquad (3)$$

Zusatz 1. Gleichung (3) gilt auch für den ganzen Kegel; denn ein Kegel kann angesehen werden als Kegelrumpf, dessen einer Grundkreis Null ist.

Zusatz 2. Gleichung (2), in der Form: $M = 2\,\frac{r + r'}{2}\,\pi s$ geschrieben, besagt (vgl. III. 9. b), daß der Mantel des Kegelrumpfes gleich dem Mantel eines Cylinders ist, dessen Höhe gleich der Mantellinie, und dessen Halbmesser gleich dem arithmetischen Mittel der Grundkreis-Halbmesser des Kegelrumpfes ist. — Gleichung (3) lehrt ferner, daß der Mantel des Kegelrumpfes gleich dem Mantel eines Cylinders ist, der die gleiche Höhe, und das Mittellot der Mantellinie zum Halbmesser hat.

Zusatz 3. Soll der Mantel in der Höhe und den zwei Grundkreis-Halbmessern ausgedrückt werden, so ist in Gleichung (2) für s zu setzen:

$$s = \sqrt{h^2 + (r - r')^2}.$$

Lehrsatz 16.

Sind die Grundflächen eines Prismatoides $= G$ und G', und ist der Mittelschnitt $= M$, die Höhe $= h$, so ist der Inhalt:

$$K = \frac{h}{6}\left(G + G' + 4\,M\right).$$

Beweis. Die Grundflächen seien (Fig. 59) $ABC\ldots = G$ und $FGH\ldots = G'$, der Mittelschnitt sei $KLM\ldots = M$. Man zerlege den Mittelschnitt von einem in seinem Innern beliebig gewählten Punkt T aus in die Dreiecke $TKL = \triangle_1$, $TLM = \triangle_2$, u. s. f. Zerlegt man ferner das Prismatoid von demselben Punkt T aus in Pyramiden (III. Einl. 9), so zerfällt es in 3 Hauptteile:

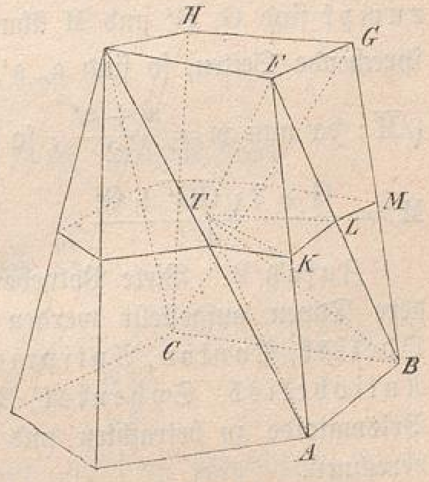


Fig. 59.

1) Pyr. $T,ABC\ldots = \frac{1}{3}G\,\frac{h}{2}$,

2) Pyr. $T,FGH\ldots = \frac{1}{3}G'\,\frac{h}{2}$,

3) alle dreiseitigen Pyramiden, deren Grundflächen die

Seitenflächen des Prismatoides bilden. Eine dieser letzteren Pyramiden sei T, ABF; von ihrer Grundfläche ABF wird durch die Seite KL des Mittelschnittes ein ähnliches Dreieck KLF mit halb so großen Seiten abgeschnitten; daher ist $\triangle ABF = 4 . \triangle KLF$, und folglich Pyr. T, ABF = 4 . Pyr. T, KLF (III. 12. Zus. 1). Betrachtet man nun in Pyr. T, KLF das Dreieck $TKL = \triangle_1$ als Grundfläche, so ergiebt sich ihr Inhalt $= \frac{1}{3} \triangle_1 \frac{h}{2}$; folglich ist Pyr. T, ABF $= 4 . \frac{1}{3} \triangle_1 \frac{h}{2} = \frac{2}{3} \triangle_1 h$. Die Summe aller dreiseitigen Pyramiden ist daher $= \frac{2}{3}(\triangle_1 + \triangle_2 + \ldots) h = \frac{2}{3} M h$. — Der Inhalt des ganzen Prismatoides ist somit:

$$K = \frac{1}{3} G \frac{h}{2} + \frac{1}{3} G' \frac{h}{2} + \frac{2}{3} M h$$

$$= \frac{h}{6} \left(G + G' + 4 M \right).$$

Zusatz 1. In dieser Formel sind alle im vorangehenden bewiesenen Inhaltsformeln als spezielle Fälle enthalten (vgl. III. Einl. 12). Beim Prisma ist $G = G' = M$. — Bei der Pyramide ist $G' = 0$, $M = \frac{G}{4}$ (III. 10. b). — Beim Pyramidenrumpf sind G, G' und M ähnlich; sind also a, a', m drei entsprechende Seiten, so sind a, a', m proportioniert mit $\sqrt{G}$, $\sqrt{G'}$, $\sqrt{M}$; da nun $m = \frac{a + a'}{2}$, so ist auch $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G'}}{2}$, also $M = \frac{G + 2\sqrt{GG'} + G'}{4}$.

Zusatz 2. Viele Polyederformen, die zuweilen als besondere Typen aufgestellt werden (z. B. mit den Benennungen: Obelisk, Ponton, Antiprisma, Antipyramidenrumpf, Antiobelisk, Sphenisk, Walm, u. s. f.) sind als einfache Prismatoide zu betrachten und nach der Prismatoid-Formel zu berechnen.

Als Beispiel für die Berechnung diene das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma. Sind von ihm geg.: die drei Parallelkanten a, b, c und der zu ihnen senkrechte Querschnitt Q, so betrachte man das Trapez mit den Seiten a und b als Grundfläche G, die Kante c als Grundfläche G'. Bezeichnet man die Entfernung der Kanten a und b mit e, und die Entfernung der Kante c von der Trapezfläche G mit h, so stellt h die Höhe des Prismatoides vor, und es ist: $Q = \frac{eh}{2}$.

Die Grundflächen des Prismatoides sind: $G = \frac{a+b}{2}e$, $G' = 0$; der Mittelschnitt M ist ein Trapez mit den Parallelseiten $\frac{a+c}{2}$ und $\frac{b+c}{2}$ und der Höhe $\frac{e}{2}$ also ist: $M = \frac{a+b+2c}{4} \cdot \frac{e}{2}$. Hiernach ergiebt sich:

$$K = \frac{h}{6}\left(\frac{a+b}{2}e + (a+b+2c)\frac{e}{2}\right)$$
$$= \frac{he}{6}(a+b+c)$$
$$= Q\frac{a+b+c}{3}.$$

Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma ist also gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche der Querschnitt, und dessen Höhe das arithmetische Mittel zwischen den Parallelkanten des schiefabgeschnittenen Prismas ist.

17—20: **Berechnung der Kugel. Guldins Regel.**

Lehrsatz 17.

Ist der Halbmesser einer Kugel $= R$, so ist

a. der Inhalt: $K = \frac{4}{3}R^3\pi$,

b. die Oberfläche: $O = 4R^2\pi$.

Beweis. a. Man denke sich auf dem Grundkreis einer von der Kugel abgeschnittenen Halbkugel einen Cylinder errichtet, dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist. Auf dem andern Grundkreis des Cylinders, dessen Ebene die Halbkugel berührt, denke man sich einen Kegel errichtet, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt. Fig. 60*) stellt einen

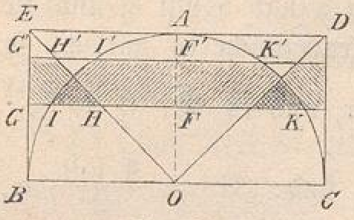


Fig. 60.

durch die gemeinschaftliche Achse OA der drei Körper gelegten Achsenschnitt vor: Halbkr. BAC ist der Achsenschnitt der Halbkugel, Rechteck BCDE — des Cylinders, Dreieck DEO — des Kegels. Die Differenz von Cylinder und Kegel ist ein Umdrehungskörper, dessen Halbmeridian $\triangle$ OBE ist.

Ein beliebiger Parallelschnitt des Cylinders, dessen Entfernung OF vom Kugelmittelpunkt $= x$ sei, erzeugt als Schnittfigur des Umdrehungskörpers einen Kreisring, als Schnittfigur der Halbkugel einen Kugelkreis. Die zwei Halbmesser des Kreisringes sind: $FG = R$, $FH = x$ (weil W. $FOH = \frac{1}{2} R$); folglich ist der Inhalt des Ringes $= (R^2 - x^2)\pi$. Der Halbmesser des Kugelkreises ist: $FI = \sqrt{OI^2 - OF^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$, folglich sein Inhalt: $= (R^2 - x^2)\pi$. Es haben somit die von jeder beliebigen Parallelschnitt-Ebene erzeugten Schnittfiguren des Umdrehungskörpers und der Halbkugel gleichen Flächeninhalt. Hieraus folgt (nach III. 11. Zus.), daß die Halbkugel gleich dem Umdrehungskörper ist; (die im Beweise von III. 11 betrachteten, zwischen je zwei Parallelschnitten errichteten senkrechten Prismen sind bei der Halbkugel Cylinder, bei dem Umdrehungskörper cylindrische Röhren.) Nun ist der Inhalt des Cylinders $= R^3\pi$ (III. 9. a), der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3} R^3\pi$ (III. 13. a), daher der Inhalt des Umdrehungskörpers $= \frac{2}{3} R^3\pi$. Der Inhalt der Halbkugel hat denselben Wert; folglich ist der Inhalt der ganzen Kugel:

$$K = \frac{4}{3} R^3\pi.$$

*) Man denke sich in Fig. 60 die Linie G'H'I'F'K' sowie die Schraffierstriche hinweg.

b. Teilt man einen Halbkreis PAP′ (Fig. 61) in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, verbindet die einzelnen Teilpunkte durch Sehnen, und fällt von den Teilpunkten die Senkrechten auf den Durchmesser PP′: so erhält man dadurch in den Halbkreis ein Vieleck einbeschrieben, das aus lauter rechtw. Trapezen und zwei rechtw. Dreiecken zusammengesetzt ist. Dreht man das ganze Gebilde um den Durchmesser PP′, so beschreibt der Halbkreis eine Kugel, jedes der zwei Dreiecke einen Kegel, und jedes Trapez einen Kegelrumpf. Sämtliche Kegelrümpfe und Kegel bilden zusammen einen der Kugel einbeschriebenen Umdrehungskörper. Ist p die Entfernung der gleichen Sehnen vom Mittelpunkt des Halbkreises, so sind die Mittellote der Mantellinien der einzelnen Kegelrümpfe und Kegel sämtlich gleich p. Bezeichnet man daher die Höhen der einzelnen Kegelrümpfe und Kegel mit h_1, $h_2 \ldots$, die Oberfläche des einbeschriebenen Umdrehungskörpers mit O_i und den Halbmesser der Kugel mit R, so ist (nach III. 15. b u. Zus. 1):

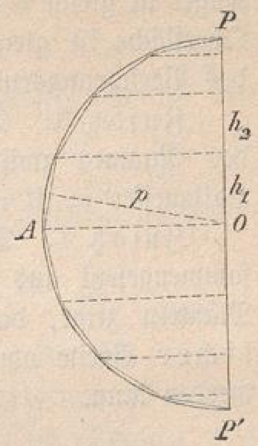


Fig. 61.

$$O_i = 2p\pi h_1 + 2p\pi h_2 + \ldots$$
$$= 2p\pi(h_1 + h_2 + \ldots) = 2p\pi . 2R.$$

Läßt man nun die Sehnen unendlich klein werden, so wird $p = R$, der Halbmeridian des Umdrehungskörpers geht in den Halbkreis, also die Oberfläche des Umdrehungskörpers in die Oberfläche der Kugel über; man erhält daher:

$$O = 4R^2\pi.$$

Zusatz 1. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die Kuben —, die Oberflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser. (Vgl. III. 12. Zus. 3.)

Zusatz 2. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Vierfachen eines Großkreises. — Da der Inhalt des Berührungscylinders der Kugel (im engeren Sinn, vgl. II. Einl. 9. d) $= 2R^3\pi$, sein Mantel $= 4R^2\pi$, seine Oberfläche $= 6R^2\pi$ ist

(III. 9), so kann man den Satz aussprechen: Der Inhalt der Kugel ist gleich $\frac{2}{3}$ des Inhalts ihres Berührungscylinders, ihre Oberfläche ist gleich dem Mantel oder gleich $\frac{2}{3}$ der Oberfläche des Berührungscylinders.

Zusatz 3. Der massive Inhalt einer Hohlkugel, d. i. des Raumes zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, deren Halbmesser $= R$ und r sind, ist $= \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi$.

Zusatz 4. Die Betrachtung der Kugeloberfläche als zusammengesetzt aus unendl. vielen unendl. schmalen Kegelrumpf-Mänteln zeigt, daß ein Stück der Kugeloberfläche von endlicher Breite ohne Dehnung nicht in eine Ebene abgewickelt werden kann.

Lehrsatz 18.

a. Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R eine Kugelzone, deren Höhe $= h$ ist, und deren Grundkreise die Halbmesser r und r' und die Entfernungen e und $e-h$ vom Kugelmittelpunkt haben, so ist der Inhalt der Kugelzone:

$$K_z = \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 3e^2 + 3eh - h^2\right). \quad (1)$$

$$K_z = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + 3r'^2 + h^2\right). \quad (2)$$

b. Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R ein Kugelabschnitt, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundkreis-Halbmesser $= r$ ist, so ist der Inhalt des Kugelabschnittes:

$$K_a = \frac{\pi h^2}{3}\left(3R - h\right). \quad (3)$$

$$K_a = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right). \quad (4)$$

c. Mit Zugrundelegung derselben Bezeichnungen ist die krumme Oberfläche der

Kugelzone und ebenso des Kugelabschnittes oder der Kugelhaube:

$$O = 2R\pi h. \tag{5}$$

Beweis. a. Es sei (Fig. 62) FF′ die Achse, JKK′J′ der Achsenschnitt der Kugelzone, A der Pol ihrer Grundkreise, O der Mittelpunkt ihrer Kugel. Dann ist: $OA = R$, $FF' = h$, $OF' = e$, $OF = e - h$, $FJ = r$, $F'J' = r'$. Man denke sich den zu den Grundkreisen

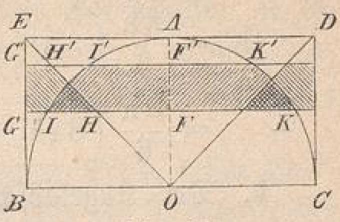


Fig. 62.

der Kugelzone parallelen Großkreis der Kugel, und über ihm die nämliche Konstruktion ausgeführt wie im Beweis von III. 17. a. Dann folgt aus III. 11. Zus. und aus dem Beweise von III. 17. a, daß die Kugelzone gleich ist dem zwischen ihren zwei Grundkreis-Ebenen enthaltenen Teile des in III. 17. a betrachteten Umdrehungskörpers. In Fig. 62 stellt das Trapez GHH′G′ den halben Achsenschnitt dieses Teiles vor. Er kann berechnet werden als Differenz eines Cylinders und eines Kegelrumpfes: der Cylinder hat die Höhe $FF' = h$ und den Halbmesser $FG = R$; der Kegelrumpf hat die Höhe $FF' = h$ und die Grundkreis-Halbmesser $F'H' = e$, $FH = e - h$. Daher ist (gemäß III. 9. a und 15. a):

$$K_z = R^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left(e^2 + e(e-h) + (e-h)^2\right)$$

$$= R^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left(3e^2 - 3eh + h^2\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 3e^2 + 3eh - h^2\right). \tag{1}$$

Aus Gleichung (1) ergiebt sich weiter Gleichung (2), wenn R und e in r und r′ ausgedrückt werden. Zu diesem Behufe liefern die zwei rechtw. Dreiecke OFJ und OF′J′:

$$r^2 = R^2 - (e-h)^2,$$

$$r'^2 = R^2 - e^2,$$

subtr.: $$r^2 - r'^2 = 2eh - h^2,$$

also: $$eh = \frac{r^2 - r'^2 + h^2}{2};$$

ferner folgt: $3R^2 - 3e^2 = 3r'^2$.

Werden diese zwei Werte in (1) eingesetzt, so erhält man:

$$K_z = \frac{\pi h}{3}\left(3r'^2 + \frac{3(r^2 - r'^2 + h^2)}{2} - h^2\right)$$
$$= \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + 3r'^2 + h^2\right). \qquad (2)$$

b. Der Kugelabschnitt kann als Kugelzone angesehen werden, in der ein Grundkreis $= 0$, also $e = R$ ist. Setzt man daher in den Gleichungen (1) und (2): $e = R$ und $r' = 0$, so erhält man:

$$K_a = \frac{\pi h^2}{3}\left(3R - h\right). \qquad (3)$$

$$K_a = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right). \qquad (4)$$

c. Teilt man den Bogen des halben Achsenschnittes der Kugelzone oder Kugelhaube in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und verfährt im übrigen ganz ebenso wie im Beweise von III. 17. b, so ergiebt sich:

$$O = 2R\pi h. \qquad (5)$$

Anm. Sämtliche fünf Formeln gelten auch für den Fall, daß der Kugelmittelpunkt im Innern der Kugelzone oder des Kugelabschnittes liegt. Um dies für Formel (1), worin dann $h > e$ ist, nachzuweisen, teile man die Kugelzone durch den zu ihren Grundkreisen parallelen Großkreis in zwei Teile, deren Höhen e und $h - e$ sind, und addiere die nach (1) berechneten Inhalte beider Teile. — Formel (2) ergiebt sich sodann aus Formel (1) in derselben Weise wie oben (mit $h - e$ statt $e - h$).

Zusatz 1. Aus (5) folgt: *Ist einer Kugel ein Berührungscylinder umbeschrieben, so schneiden irgend zwei Parallelschnitte des Cylinders von der Kugeloberfläche und vom Cylindermantel flächengleiche Zonen ab.*

Mit Beziehung auf III. 15, Gleichung (3) folgt ferner: die krumme Oberfläche einer Kugelzone oder einer Kugelhaube ist gleich dem Mantel eines Kegelrumpfes, der mit ihr die Achse gemein hat, und dessen Mantel die Zone oder Haube nach demjenigen Parallelkreis berührt, dessen Ebene die Achse halbiert.

Zusatz 2. Ist s die geradlinige Entfernung des Pols einer Kugelhaube von der Peripherie ihres Grundkreises, so ist: $s^2 = 2Rh$, also:

$$O_a = s^2\pi$$
$$= (r^2 + h^2)\pi.$$

In Worten: die Kugelhaube ist gleich einem Kreis, dessen Halbmesser gleich der Entfernung ihres Pols von der Peripherie des Grundkreises ist.

Lehrsatz 19.

Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R ein Kugelausschnitt, dessen zugehöriger Kugelabschnitt die Höhe h hat, so ist der Inhalt des Kugelausschnittes:

$$K = \tfrac{2}{3} R^2\pi h.$$

Beweis. Man denke sich in den Kugelausschnitt ein Polyeder einbeschrieben, bestehend aus lauter Pyramiden, deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel, und deren Grundecken sämtlich auf der Haubenfläche des Kugelausschnittes liegen. Sind $g_1, g_2 \ldots$ die Grundflächen, $h_1, h_2 \ldots$ die zugehörigen Höhen dieser Pyramiden, so ist der Inhalt des einbeschriebenen Polyeders $= \frac{1}{3}(g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots)$ (III. 12. c). Werden nun die Grundflächen unendlich klein gedacht, so werden die Pyramidenhöhen $h_1, h_2 \ldots$ sämtlich $= R$, die Summe der Grundflächen wird gleich der Haube des Kugelausschnittes, und das Polyeder geht in den Kugelausschnitt über. Man hat daher:

$$K = \frac{R}{3} \cdot \left(g_1 + g_2 + \ldots\right) = \frac{R}{3} \cdot 2R\pi h$$
$$= \tfrac{2}{3} R^2\pi h.$$

Anm. Die Formel gilt auch für einen solchen Kugelausschnitt, der größer als die Halbkugel ist (vgl. II. Einl. 12. a).

Zuſatz 1. Auf dieſem Wege hätte auch der Inhalt der Kugel berechnet werden können; denn die Kugel kann als Kugelausſchnitt angeſehen werden (II. Einl. 12. c). Hiernach iſt ihr Inhalt gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleich der Kugeloberfläche, und deren Höhe gleich dem Kugelhalbmeſſer iſt. — Der Kugelabſchnitt hätte als Differenz eines Kugelausſchnittes und eines Kegels, und hierauf die Kugelzone als Differenz zweier Kugelabſchnitte berechnet werden können.

Zuſatz 2. Auf dieſelbe Weiſe läßt ſich das Stück einer Kugel berechnen, das von einem ſphär. Vieleck und dem zugehörigen Vielkant begrenzt iſt. Der Inhalt eines ſolchen Körpers iſt gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleichen Flächeninhalt mit dem ſphär. Vieleck hat (II. 16), und deren Höhe gleich dem Halbmeſſer der Kugel iſt.

Zuſatz 3. Zwei Kugelausſchnitte gleicher Kugeln verhalten ſich dem Inhalte nach wie die Höhen der zugehörigen Kugelabſchnitte.

Zuſatz 4. Ein Hohlkugelausſchnitt (Kugelgewölbe) iſt die Differenz zweier Kugelausſchnitte, welche konzentriſchen Kugeln angehören und die Achſe und den erzeugenden Winkel gemein haben. Die Halbmeſſer der zwei Kugeln ſeien = R und r, die Höhen der zugehörigen Kugelabſchnitte = H und h (die „lichte" Höhe = h). Iſt nun O (Fig. 63) der Mittelpunkt der zwei Kugeln, AOB der Achſenſchnitt des größeren —, aOb der Achſenſchnitt des kleineren Kugelausſchnittes, ſind ferner CD und cd die Höhen der zugehörigen Kugelabſchnitte, und zieht man AC und ac: ſo iſt $\triangle ACD \backsim acd$, alſo:

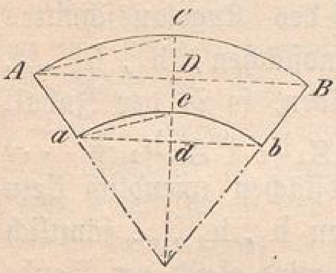


Fig. 63.

$$\frac{H}{h} = \frac{AD}{ad} = \frac{R}{r}; \quad H = \frac{Rh}{r}.$$

Der Inhalt des Hohlkugelausſchnittes iſt folglich:

$$K = \frac{2}{3} R^2 \pi H - \frac{2}{3} r^2 \pi h = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{R^3 h}{r} - r^2 h\right)$$

$$= \frac{2\pi h (R^3 - r^3)}{3r}.$$

Lehrſatz 20.

Guldins Regel: Wird durch Drehung einer ebenen Figur um eine in ihrer Ebene liegende und die Figur nicht ſchneidende Achſe ein Umdrehungskörper erzeugt, ſo iſt:

a. deſſen Inhalt gleich dem Inhalt eines ſenkrechten Prismas, das die gedrehte Figur zur Grundfläche, und die Länge der vom Schwerpunkt ihrer Fläche beſchriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat.

b. Die Oberfläche iſt gleich dem Mantel eines ſenkrechten Prismas, das die gedrehte Figur zur Grundfläche, und die Länge der vom Schwerpunkt ihres Umfanges beſchriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat.

Beweis. a. Um den Satz zunächſt für den Fall zu beweiſen, daß die gedrehte Figur ein Dreieck iſt, fälle man von deſſen Ecken A, B, C (Fig. 64) die Senkrechten AA′, BB′, CC′ auf die Drehachſe. Iſt O ein beliebiger Punkt der Drehachſe, ſo bezeichne man die Strecken OA′, OB′, OC′ (Abſciſſen) mit a, b, c, und die Senkrechten AA′, BB′, CC′ (Ordinaten) mit a′, b′, c′. Der Inhalt des Dreiecks läßt ſich nun als algebraiſche Summe von drei rechtw. Trapezen berechnen, deren Höhen A′B′, B′C′, C′A′ ſind. Der Inhalt iſt alſo:

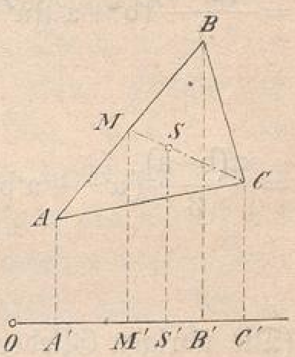


Fig. 64.

$$J = (b-a)\frac{b'+a'}{2} + (c-b)\frac{c'+b'}{2} + (a-c)\frac{a'+c'}{2},$$

und zwar gilt dieſe Gleichung, wie auch immer das Dreieck gegen die Drehachſe liegen mag.

Der Flächenſchwerpunkt S des Dreiecks liegt auf einer der

Schwerlinien CM so, daß CS = 2 SM ist. Um seine Entfernung SS′ von der Drehachse zu finden, benütze man den Satz der ebenen Geom., daß, wenn in einem Trapez ABB′A′ eine zu den parallelen Seiten AA′ und BB′ parallele Gerade MM′ die nicht parallelen Seiten AB und A′B′ im Verhältnis $\frac{AM}{MB} = \frac{\alpha}{\beta}$ teilt: $MM' = \frac{\beta \,.\, AA' + \alpha \,.\, BB'}{\alpha + \beta}$ ist. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man:

$$SS' = \frac{a' + b' + c'}{3}.$$

Dies ist nun der Halbmesser des vom Schwerpunkt beschriebenen Kreises. Der Inhalt des senkrechten Prismas, welches das Dreieck zur Grundfläche und die Länge der Kreisperipherie zur Höhe hat, ist daher:

$$K = J \,.\, 2\,SS'\pi$$
$$= \left[(b-a)\frac{b'+a'}{2} + (c-b)\frac{c'+b'}{2} + (a-c)\frac{a'+c'}{2}\right]\frac{2(a'+b'+c')\pi}{3}$$
$$= \frac{\pi(b-a)}{3}(b'+a')(a'+b'+c') + \frac{\pi(c-b)}{3}(c'+b')(a'+b'+c') + \frac{\pi(a-c)}{3}(a'+c')(a'+b'+c')$$
$$= \frac{\pi(b-a)}{3}(a'^2 + a'b' + b'^2) + \frac{\pi(c-b)}{3}(b'^2 + b'c' + c'^2) + \frac{\pi(a-c)}{3}(c'^2 + c'a' + a'^2)\,.$$

(Die übrigen Glieder heben sich weg.) Dies stellt aber (nach III. 15. a) die algebraische Summe der Inhalte der von den einzelnen Seiten des Dreiecks beschriebenen Kegelrümpfe, d. h. den Inhalt des von dem Dreieck beschriebenen Umdrehungskörpers vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Dreieck.

Ist die gedrehte Figur ein Viereck, so teile man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, deren Inhalte $= i_1$ u. i_2, und deren Schwerpunkte s_1 u. s_2 seien. Man erhält dann den Schwerpunkt S des Vierecks, wenn man die Strecke $s_1 s_2$ im Verhältnis $\frac{s_1 S}{S s_2} = \frac{i_2}{i_1}$ teilt. Fällt man daher von s_1, s_2, S die Senkrechten $s_1 s_1'$, $s_2 s_2'$, SS' auf die Drehachse, so ist nach dem oben erwähnten Trapez-Satze:

$$SS' = \frac{i_1 . s_1 s_1' + i_2 . s_2 s_2'}{i_1 + i_2};$$

folglich ist der Inhalt des senkrechten Prismas, welches das Viereck zur Grundfläche und die Länge der von SS' beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat:

$$K = (i_1 + i_2) \frac{2 (i_1 . s_1 s_1' + i_2 . s_2 s_2') \pi}{i_1 + i_2}$$
$$= i_1 . 2 s_1 s_1' \pi + i_2 . 2 s_2 s_2' \pi .$$

Dies stellt aber (nach dem ersten Teil des Beweises) die Summe der von den zwei einzelnen Dreiecken beschriebenen Umdrehungskörper, d. h. den Inhalt des von dem ganzen Viereck beschriebenen Umdrehungskörpers vor.

Ist die gedrehte Figur ein Fünfeck, so teile man dasselbe durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein Viereck, deren Inhalte $= i_1$ u. i_2, deren Schwerpunkte s_1 u. s_2 seien, und mache den nämlichen Schluß wie oben. Ebenso geht man dann vom Fünfeck zum Sechseck über, u. s. f. Der Satz gilt also für ein Vieleck von jeder beliebigen Seitenzahl. — Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

b. ABCDE . . . (Fig. 65) sei das gedrehte Vieleck. Man erhält den Schwerpunkt seines Umfanges dadurch, daß man die Seiten AB, BC, CD, DE . . . in den Punkten H, J, K, L . . . halbiert, HJ zieht und HJ im Punkt O im Verhältnis $\frac{HO}{OJ} = \frac{BC}{AB}$ teilt, ferner OK zieht und OK im Punkt P im Verhältnis $\frac{OP}{PK} = \frac{CD}{AB + BC}$ teilt, ferner PL zieht und

PL im Punkt Q im Verhältnis DE zu AB + BC + CD teilt, u. s. f. Der letzte Teilpunkt S ist dann der Schwer-

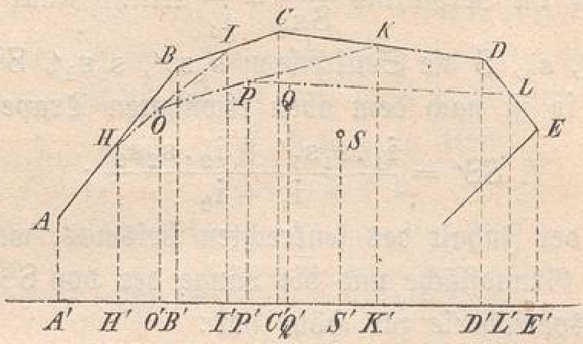


Fig. 65.

punkt. Fällt man von sämtlichen Punkten die Senkrechten AA′, BB′, ... HH′, JJ′, ... OO,′ PP′, ... SS′ auf die Dreh-achse und bezeichnet deren Längen mit a′, b′, ... h′, i′, ... o′, p′, ... s′: so ist nach dem in a) erwähnten Trapez-Satze:

$$o' = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i'}{AB + BC},$$

$$p' = \frac{(AB + BC)\, o' + CD \,.\, k'}{AB + BC + CD} = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k'}{AB + BC + CD},$$

$$q' = \frac{(AB + BC + CD)\, p' + DE \,.\, l'}{AB + BC + CD + DE} = \frac{AB.h' + BC.i' + CD.k' + DE.l'}{AB + BC + CD + DE},$$

. . . .

$$s' = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k' + \ldots}{AB + BC + CD + \ldots}$$

$$= \frac{AB \,.\, \frac{a' + b'}{2} + BC \,.\, \frac{b' + c'}{2} + CD \,.\, \frac{c' + d'}{2} + \ldots}{AB + BC + CD + \cdots}.$$

Der Mantel des senkrechten Primas, welches das Vieleck zur Grundfläche und die Länge der von S beschriebenen Kreis-peripherie zur Höhe hat, ist nun:

$$M = (AB + BC + CD + \ldots) \,.\, 2\, s'\pi$$

$$= (a' + b')\pi \,.\, AB + (b' + c')\pi \,.\, BC + (c' + d')\pi \,.\, CD + \ldots.$$

Dies stellt aber (nach III. 15. b) die Summe der Mäntel der von den einzelnen Seiten des Vielecks beschriebenen Kegelrümpfe, d. h. die Oberfläche des Umdrehungskörpers vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Vieleck von beliebig vielen Seiten. Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

Anm. Beide Beweise bleiben gültig, auch wenn eine Seite des gedrehten Vielecks in die Drehachse fällt. — Satz b gilt auch für den Fall, daß die gedrehte Figur ein nicht geschlossener polygonaler Zug (oder Kurvenbogen) ist.

Zusatz. Mittels dieser Sätze läßt sich Inhalt und Oberfläche von jedem Umdrehungskörper berechnen, sobald der Flächen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt des Halbmeridians bekannt ist. (Z. B. bestimme man hiernach Inhalt, Mantel und Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kegelrumpf.) Die Sätze können aber auch umgekehrt verwendet werden, um die Schwerpunkte einer ebenen Figur zu bestimmen, sobald der Rauminhalt, bezw. die Oberfläche eines Körpers bekannt ist, der durch Drehung der Figur entstanden gedacht werden kann. Um z. B. Flächen-Schwerpunkt, Bogen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt eines Halbkreises zu bestimmen, verwende man die Kugel. Alle drei Punkte liegen auf dem zum Durchmesser des Halbkreises senkrechten Halbmesser. Bezeichnet man ihre Entfernungen vom Durchmesser bezw. mit x_f, x_b, x_u, und ist R der Halbmesser des Halbkreises, so hat man:

$$\frac{R^2\pi}{2}\cdot 2x_f\pi = \frac{4}{3}R^3\pi, \text{ woraus: } x_f = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$R\pi \,.\, 2x_b\pi = 4R^2\pi, \quad \text{„} \quad x_b = \frac{2R}{\pi}.$$

$$(R\pi + 2R)\,.\, 2x_u\pi = 4R^2\pi, \quad \text{„} \quad x_u = \frac{2R}{2+\pi}.$$

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der algebraischen Behandlung von stereometrischen Aufgaben tritt nicht selten der Fall ein, daß das Resultat nur näherungsweise mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, oder daß man sich mit dem bloßen Auftragen des numerischen Rechnungsresultates begnügen muß. Denn es lassen sich mit Zirkel und Lineal nur solche algebraische Ausdrücke konstruieren, die rational sind oder Quadratwurzeln enthalten, nicht aber solche mit Kubikwurzeln, wie sie bei stereometrischen Aufgaben häufig vorkommen. Ferner läßt sich die Länge eines Kreisbogens auf einer Geraden oder auf einer andern Kreislinie nur mittels einer Näherungskonstruktion auftragen.

1—10: Beispiele von Aufgaben mit algebraischer Lösung.

Aufgabe 1.

Die Höhe eines Cylinders zu bestimmen, dessen Halbmesser gegeben ist, und dessen Mantel einen geg. Flächeninhalt habe.

Auflösung. Der geg. Halbmesser sei r, der Flächeninhalt q^2, die gesuchte Höhe werde mit x bezeichnet. Dann muß sein. (III. 9. b):

$$2 r \pi x = q^2, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \frac{q^2}{2 r \pi}.$$

Man hat daher den Kreis vom Halbmesser r zu rektifizieren, und zu seinem Umfang und q die dritte Proportionale zu bestimmen: so ist diese die gesuchte Höhe. Oder man berechnet aus den geg. Zahlenwerten von r und q^2 den Zahlenwert von x.

Aufgabe 2.

Einen Cylinder zu konstruieren, dessen Höhe gegeben ist, und der mit einem geg. Cylinder gleichen Rauminhalt habe.

Auflösung. Der geg. Cylinder habe den Halbmesser r und die Höhe h, der gesuchte Cylinder habe die geg. Höhe h′ und den Halbmesser x. Dann muß sein (III. 9. a):

$$x^2 \pi h' = r^2 \pi h,$$

$$x^2 = \frac{r^2 h}{h'}.$$

Dieses Resultat, in der Form: $x^2 = r \cdot \frac{rh}{h'}$ geschrieben, besagt, daß x das geom. Mittel ist zwischen r und der vierten Proportionalen zu h′, r und h. Hiernach hat man für x folgende Konstruktion: Ist in einem Achsenschnitt des geg. Cylinders (Fig. 66) AB = h, BC = r, so trage man auf BA die Strecke BD = h′ auf, ziehe DC, und durch A die Parallele zu DC, welche BC in E schneidet; dann ist BE die vierte Proportionale zu h′, r und h. Beschreibt man hierauf über BE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die auf BE in C errichtete Senkrechte in F schneidet: so ist BF das geom. Mittel zwischen r und BE, also = x.

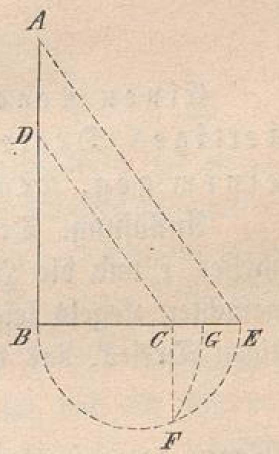


Fig. 66.

Trägt man daher auf BE die Strecke BG = BF auf, so ist das Rechteck aus BD und BG das erzeugende Rechteck des gesuchten Cylinders.

Aufgabe 3.

Einen Würfel zu konstruieren, der gleich einem geg. Quader sei.

Auflösung. Sind l, m, n die dreierlei Kanten des Quaders, und bezeichnet x die Kante des gesuchten Würfels, so muß sein (III. 6):

$$x^3 = l m n, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \sqrt[3]{l m n}.$$

Hiefür giebt es keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Man muß daher l, m, n in Zahlen von Längeneinheiten ausdrücken, aus ihrem Produkt die Kubikwurzel ausziehen, die gefundene Zahl von Längeneinheiten auf einer Geraden auftragen, und aus der erhaltenen Strecke als Kante den gesuchten Würfel konstruieren.

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann jeder Körper, dessen Inhalt sich überhaupt berechnen läßt, in einen Würfel verwandelt werden.

Aufgabe 4.

Einen Kegel zu ermitteln, der ein gleichseitiges Dreieck als Achsenschnitt habe und einem geg. Kegel gleich sei.

Auflösung. Der geg. Kegel habe den Grundkreis-Halbmesser r und die Höhe h; die entsprechenden Strecken des gesuchten Kegels seien x und y. Dann ist in dem gleichseitigen Dreieck, das den Achsenschnitt des letzteren vorstellt:

$$y = x\sqrt{3}.$$

Wegen der geforderten Gleichheit der zwei Kegel muß ferner sein (III. 13. a):

$$\tfrac{1}{3}x^2\pi y = \tfrac{1}{3}r^2\pi h.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{r^2h}{\sqrt{3}}} \qquad y = \sqrt[3]{3r^2h}.$$

Hieraus bestimmen sich x und y als Zahlenwerte.

Aufgabe 5.

Eine Pyramide durch Parallelschnitte in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Die Höhe der Pyramide sei h. Die gesuchten Parallelschnitte, die von der Spitze die Entfernungen x_1, x_2 ... (x_1 die kleinste) haben mögen, schneiden von der Pyramide Teil-Pyramiden ab, die der ganzen Pyramide ähnlich sind. Bezeichnet man also ihre Inhalte bezw. mit p_1, p_2 . . ., und den Inhalt der ganzen Pyramide mit P, so ist (III. 12. Zus. 2):

$$\frac{x_1^3}{h^3} = \frac{p_1}{P} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{x_2^3}{h^3} = \frac{p_2}{P} = \frac{2}{n}, \text{ u. s. f.}$$

folglich:

$$x_1 = h\sqrt[3]{\frac{1}{n}},$$

$$x_2 = h\sqrt[3]{\frac{2}{n}}, \text{ u. s. f.}$$

Zusatz 1. Wird eine beliebige Seitenkante k der Pyramide von den einzelnen Parallelschnitten in Punkten geschnitten, deren Entfernungen von der Spitze $= y_1$, y_2 . . . sind, so geben die obigen Gleichungen die Werte von y_1, y_2 . . ., wenn man in ihnen h durch k ersetzt.

Zusatz 2. Da die Werte von x_1, x_2 . . . unabhängig von der Größe der Grundfläche sind, so folgt, daß alle Pyramiden von gleichen Höhen gleiche Werte von x_1, x_2 . . . haben, und daß bei Pyramiden von ungleichen Höhen die Werte von x_1, x_2 . . . das nämliche Verhältnis haben.

Aufgabe 6.

Einen Pyramidenrumpf durch Parallelschnitte in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Die beiden Grundflächen seien G und g, die Höhe sei h. Ergänzt man den Pyramidenrumpf zur Pyramide und bezeichnet die Höhe der ganzen Pyramide mit X, diejenige der Ergänzungspyramide mit x, so ist (vgl. Bew. von III. 14):

$$X = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}, \quad x = h\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}.$$

Die Entfernungen der Parallelschnitte von der Spitze der Ergänzungspyramide seien $x_1, x_2 \ldots$ (x_1 die kleinste). Bezeichnet man nun die Inhalte der einzelnen Pyramiden, deren Höhen $x, x_1, x_2 \ldots X$ sind, bezw. mit $p, p_1, p_2 \ldots P$, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{p_1 - p}{P - p} = \frac{1}{n}, \quad \frac{p_2 - p}{P - p} = \frac{2}{n}, \quad \text{u. s. f.}$$

Da aber die Pyramiden alle unter sich ähnlich sind, so sind sie den Größen $x^3, x_1^3, x_2^3 \ldots X^3$ proportioniert (III. 12. Zus. 2). Daher ist auch:

$$\frac{x_1^3 - x^3}{X^3 - x^3} = \frac{1}{n}, \quad \frac{x_2^3 - x^3}{X^3 - x^3} = \frac{2}{n}, \quad \text{u. s. f.}$$

Hieraus folgt:

$$x_1^3 = \frac{1}{n}\left(X^3 - x^3\right) + x^3 = \frac{X^3 + (n-1)x^3}{n},$$

oder, wenn man die obigen Werte von X und x einsetzt:

$$x_1^3 = \frac{h^3\left(G\sqrt{G} + (n-1)g\sqrt{g}\right)}{n\left(\sqrt{G} - \sqrt{g}\right)^3},$$

$$x_1 = \frac{h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\sqrt[3]{\frac{G\sqrt{G} + (n-1)g\sqrt{g}}{n}}.$$

Ebenso findet man:

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\sqrt[3]{\frac{2G\sqrt{G} + (n-2)g\sqrt{g}}{n}}.$$

u. s. f.

Zusatz 1. Zus. 1 der vor. Aufg. findet auch auf diese Aufgabe Anwendung.

Zusatz 2. Ist der Körper ein Kegelrumpf, dessen Grundkreis-Halbmesser = R und r sind, so ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{h}{R - r}\sqrt[3]{\frac{R^3 + (n-1)r^3}{n}}.$$

$$x_2 = \frac{h}{R - r}\sqrt[3]{\frac{2R^3 + (n-2)r^3}{n}}. \quad \text{u. s. f.}$$

Aufgabe 7.

Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegelrumpfes zu konstruieren, dessen Achsenschnitt gegeben ist.

Auflösung. ABCD (Fig. 67) sei der halbe geg. Achsenschnitt des Kegelrumpfes, AB die Achse. Schneiden sich BA und CD verlängert in S, so ist S die Spitze des Ergänzungskegels. Beschreibt man ferner aus B mit Halbmesser BC den Quadranten BCE, so stellt dieser den vierten Teil des unteren Grundkreises des Kegelrumpfes vor. Man schlage nun aus S mit den Halbmessern SC und SD Kreise, trage die Länge des Quadrantenbogens CE mit Hilfe einer kleinen Zirkelöffnung nach und nach auf die Peripherie des mit SC beschriebenen Kreises von C nach F auf, und mache auf derselben Peripherie den Bogen CG = 4 CF. Zieht man dann SG, welche die Peripherie des mit SD beschriebenen Kreises in H schneidet, so ist der Kreisring-Ausschnitt CDHG die verlangte Abwicklungsfigur (III. Einl. 8. d und 10. c).

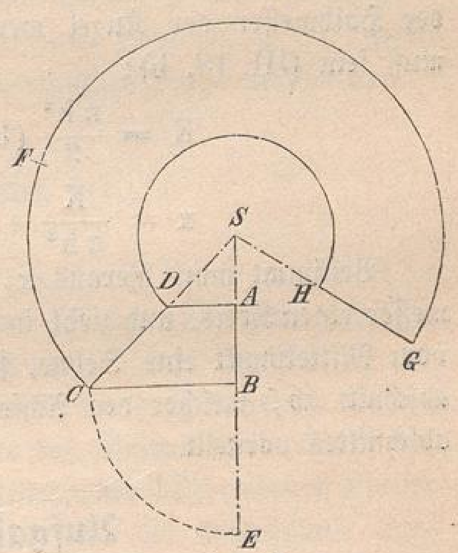


Fig. 67.

Anm. Sind die Bestimmungselemente des Achsenschnittes in Zahlen von Längeneinheiten gegeben, so kann man den Punkt G auch mit Hilfe des Transporteurs finden. Ist nämlich BC = r, AD = r′, DC = s, so ist: $SC = s \frac{r}{r - r'}$ (vgl. Bew. von III. 15. b).

Beträgt nun der (in Fig. 67 überstumpfe) Zentriwinkel CSG x Grade, so ist: $\frac{x}{360} = \frac{2r\pi}{2SC\pi} = \frac{r-r'}{s}$,

$$x = \frac{r-r'}{s}\,360.$$

Aufgabe 8.

Einen Kugelabschnitt zu konstruieren, dessen Höhe und Inhalt gegeben sind.

Auflösung. Der geg. Inhalt sei K, die geg. Höhe h; der Halbmesser der Kugel werde mit x bezeichnet. Dann muß sein (III. 18. b):

$$K = \frac{\pi h^2}{3}(3x - h), \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \frac{K}{\pi h^2} + \frac{h}{3}.$$

Bestimmt man hieraus x, beschreibt mit x als Halbmesser einen Kreis, und zieht in ihm in der Entfernung $x - h$ vom Mittelpunkt eine Sehne, so schneidet diese einen Kreisabschnitt ab, welcher den Achsenschnitt des gesuchten Kugelabschnittes vorstellt.

Aufgabe 9.

Einen Kugelausschnitt zu konstruieren, dessen Inhalt und Haubenfläche gegeben sind.

Auflösung. Der geg. Inhalt sei K, die geg. Haubenfläche O; der Halbmesser der zugehörigen Kugel werde mit x, die Höhe der Kugelhaube mit y bezeichnet. Dann muß sein (III. 19 und 18. c.):

$$K = \tfrac{2}{3}x^2\pi y, \qquad O = 2x\pi y.$$

Hieraus folgt:

$$x = 3\frac{K}{O}, \qquad y = \frac{O^2}{6K\pi}.$$

Ist also $O = p^2$, $K = q^3$, und sind p und q als Strecken geg., so hat man die zwei Gleichungen:

$$x = 3\frac{q^3}{p^2} = 3\frac{\frac{q^4}{p^2}}{q}, \quad y = \frac{p^2}{2x\pi},$$

welche folgende Konstruktion veranlassen: Man bestimme (mittels rechtw. Dreiecke aus Segm. und Höhe) zu p und q die dritte Proportionale r, hierauf zu q und r die dritte Proportionale s: so ist $x = 3s$. Man beschreibe sodann mit Halbm. $OA = x$ einen Kreis und bestimme zu dessen Umfang und zu p die dritte Proportionale y. Schneidet man nun von Halbm. OA ein Stück $AB = y$ ab, legt durch B die zu OA senkrechte Sehne CD, und zieht OC u. OD: so ist OCAD der Achsenschnitt des verlangten Kugelausschnittes.

Aufgabe 10.

Einen Wulst*) zu ermitteln, der den gleichen Inhalt und eine n-mal so große Oberfläche habe wie eine geg. Kugel.

Auflösung. Der Halbmesser der geg. Kugel sei R, der Halbmesser des Meridiankreises des Wulstes werde mit x, der Halbmesser des von seinem Mittelpunkt beschriebenen Kreises („Mittelkreises") mit y bezeichnet. Da der Mittelpunkt eines Kreises sowohl dessen Flächen-Schwerpunkt als Umfangs-Schwerpunkt vorstellt, so muß sein (III. 20):

$$x^2\pi \, . \, 2y\pi = \tfrac{4}{3}R^3\pi,$$
$$2x\pi \, . \, 2y\pi = n \, . \, 4R^2\pi.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$x = \frac{2}{3n}R, \qquad y = \frac{3n^2}{2\pi}R.$$

Hiernach kann x genau —, y durch eine Näherungskonstruktion gefunden werden.

---

*) D. i. ein Umdrehungskörper, der durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende und ihn nicht schneidende Gerade entsteht.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

1. a. Die 3-fache Flächenzahl oder Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der 2-fachen Kantenzahl und der um 6 vermehrten einfachen Kantenzahl:

$$2K \geqq 3F \geqq K + 6.$$
$$2K \geqq 3E \geqq K + 6.$$

(Da jede Fläche mindestens 3-seitig und jede Ecke mindestens 3-kantig ist, so ist W oder $2K \geqq 3F$ und $\geqq 3E$. Das übrige durch Kombinierung dieser Ungleichungen mit III. 1.)

b. Die 2-fache Flächenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Eckenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Eckenzahl. — Die 2-fache Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Flächenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Flächenzahl:

$$4E - 8 \geqq 2F \geqq E + 4.$$
$$4F - 8 \geqq 2E \geqq F + 4.$$

2. a. Es giebt kein Polyeder, in dem alle Flächen mehr als 5-seitig sind, oder in dem alle Ecken mehr als 5-kantig sind. (III. Anh. 1. a.)

b. Es giebt kein Polyeder mit 7 Kanten. (III. Anh. 1. a.)

† 3. Bildet man von einem Polyeder ein ebenes Netz und fügt dieses wieder zu einer geschlossenen Polyederoberfläche so zusammen, daß je zwei Randlinien des Netzes, die vorher zu einer Kante vereinigt waren, wieder zu einer Kante vereinigt werden, daß aber die vorherige Außenseite der Polyederoberfläche nunmehr zur Innenseite wird: so ist das neu entstandene Polyeder zu dem ursprünglichen symmetrisch. Aus jedem ebenen Netz lassen sich also zwei symmetrische Polyederformen herstellen.

4. a. Zieht man von sämtlichen Ecken eines Polyeders in derselben Richtung parallele und gleiche Strecken, so bestimmen

deren Endpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

b. Zieht man von den Ecken eines Polyeders nach einem Punkte Strecken und verlängert jede über den Punkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten symmetrisch ist.

c. Fällt man von den Ecken eines Polyeders die Senkrechten auf eine gerade Linie und verlängert jede über ihren Fußpunkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

† 5. a. Zieht man von einem Punkt S nach den Ecken eines Polyeders Strecken und teilt diese sämtlich in dem nämlichen Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten ähnlich ist, und zwar gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich, je nachdem die Teilpunkte auf derselben Seite vom Punkt S angenommen werden, auf der das ursprüngl. Polyeder liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite. Zwei entsprechende Kanten der zwei Polyeder verhalten sich wie die Entfernungen zweier entsprechenden Ecken vom Punkt S. (Vgl. II. Anh. 18.)

† b. Der Satz: III. 10. Zus. 2 gilt auch für ähnliche und ähnlich liegende P o l y e d e r. Je nachdem die zwei Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich sind, sind bei der ähnlichen Lage je zwei entsprechende Kanten gleich-gerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet, und ist der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer.

c. Drei ähnliche und ähnlich liegende Vielecke oder Polyeder haben zusammen drei Ähnlichkeitspunkte (und zwar entweder drei äußere oder einen äußeren und zwei innere), welche in gerader Linie liegen (äußere oder innere Ä h n l i c h k e i t s a c h s e). (Vgl. II. Anh. 19. — Man beweise, daß die drei Ähnlichkeitspunkte in zwei Ebenen, und folglich in deren Schnittlinie liegen müssen.)

6—13: **Prisma.**

6. a. Der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante die Summe zweier Strecken a und b ist, ist gleich dem Würfel aus

der Kante a, plus dem dreifachen Quader aus a, a und b, plus dem dreifachen Quader aus a, b und b, plus dem Würfel aus b.

b. Analoger Satz für einen Würfel, dessen Kante die Differenz zweier Strecken ist.

7. a. In jedem Quader ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

b. Projiziert man eine Strecke auf die drei Kanten eines Oktanten (indem man von den Endpunkten der Strecke die Senkrechten auf die Kanten fällt), so ist das Quadrat der Strecke gleich der Summe der Quadrate ihrer drei Projektionen.

8. a. Die Summe der Quadrate der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der sechs Diagonalflächen eines Parallelflachs ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der sechs Seitenflächen. (Man stelle zuerst eine Beziehung auf zwischen 2 Diagonalflächen und 4 Seitenflächen, die zwischen den nämlichen vier Parallelkanten liegen.)

9. a. Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelflachs oder den Mittelpunkt der Achse eines regul. Prismas von gerader Seitenzahl (Cylinders) gezogene und von der Oberfläche begrenzte Strecke wird in jenem Mittelpunkt halbiert.

b. Jede durch den Mittelpunkt gelegte Schnittebene teilt den Körper in zwei symmetrische Teile.

c. Schneidet man einen Cylinder durch zwei beliebige Ebenen (die sich selbst nicht innerhalb des Cylinders schneiden), so hat das zwischen ihnen enthaltene Cylinderstück gleichen Inhalt und gleiche Mantelfläche mit einer Zone des Cylinders, die das Stück der Achse zwischen den zwei Schnittebenen zur Höhe hat. (Vgl. auch III. Anh. 12. c.)

10. a. Jedem Quader läßt sich eine Kugel um beschreiben.

b. Jedem Rhomboeder*) läßt sich eine Kugel ein beschreiben.

11. a. Jedes Rhomboeder kann in ein reguläres sechsseitiges Prismatoid und zwei kongruente dreiseitige Pyramiden, die

*) Unter „Rhomboeder" ist hier und im folgenden stets ein Rhomboeder im engeren Sinne (vgl. III. Einl. 5. b) verstanden.

mit dem Prismatoid die Grundflächen gemein haben, zerlegt werden. Die Seitenflächen des Prismatoids und der Pyramiden sind kongruent, die Höhen sind gleich und fallen in die Hauptdiagonale des Rhomboeders. Das Prismatoid ist $= \frac{2}{3}$, jede Pyramide $= \frac{1}{6}$ des Rhomboeders.

b. Die Mitten von sechs Kanten eines Würfels, die nicht durch die nämlichen zwei gegenüberliegenden Ecken gehen, liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären Sechsecks.

12. a. Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, so liegt der Flächen-Schwerpunkt der Schnittfigur auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der zwei Grundflächen. (Man bew. den Satz zuerst für ein dreiseitiges Prisma, zerlege ein mehrseitiges Prisma in lauter dreiseitige, und konstr. die Schwerpunkte der Flächen wie im Bew. von III. 20. a. — Die Teildreiecke der Schnittfigur sind nach I. Anh. 31 denen der Grundflächen proportioniert.)

b. Der Schwerpunkt einer ebenen Figur projiziert sich als Schwerpunkt der Projektionsfigur.

c. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen mehrseitigen Prismas ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das den gleichen Querschnitt, und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der Endpolygone zur Höhe hat. (Man berechne den Inhalt mittels III. 16. Zus. 2, und die Strecke zwischen den zwei Schwerpunkten mittels des S. 164 erwähnten Trapez-Satzes.)

13. Ein Prisma wird von zwei Ebenen, deren Medianebene senkrecht zu den Seitenkanten ist, nach kongruenten Vielecken geschnitten (W e c h s e l s c h n i t t e).

14—29: Vierflach. Schwerpunkt.

14. Die Summe der sechs Keile eines Vierflachs liegt zwischen 4 R und 6 R. (Die Summe der sphär. Exzesse der Dreikante an den vier Ecken muß > 0 und < 4 R sein. Zum Bew. bringe man die Spitzen der vier Dreikante durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt einer Kugel.)

15. Die Mittellotebenen der 6 Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach 4 Geraden (den M i t t e l l o t e n d e r F l ä c h e n) und gehen alle 6 durch e i n e n Punkt, welcher

der Mittelpunkt der dem Vierflach umbeschriebenen Kugel ist.

16. a. Die inneren Medianebenen der sechs Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (den 4 inneren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach einbeschriebenen Kugel ist. (II. Anh. 36.)

b. Die äußeren Medianebenen dreier in einer Fläche liegenden Kanten und die inneren Medianebenen der drei übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach an jene Fläche anbeschriebenen Kugel ist. Von den vier Geraden ist eine eine innere Mediane, die drei andern sind äußere Medianen. Es giebt 12 äußere Medianen und 4 anbeschriebene Kugeln.

c. Die inneren Medianebenen zweier gegenüberliegenden Kanten und die äußeren Medianebenen der vier übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (äußeren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt einer Berührungskugel, die dem zweieckigen Scheitelkeilraum des Vierflachs an einer der zwei gegenüberliegenden Kanten einbeschrieben ist. Es giebt im allgem. 3 solcher Kugeln.

d. Von den 4 inneren und 12 äußeren Medianen eines Vierflachs schneiden sich also a) die 4 inneren —, b) 4mal 3 äußere und 1e innere —, c) 3mal 4 äußere in je einem Punkt.

(Eine analoge Lage wie die 8 Kugelmittelpunkte haben die 8 Punkte in I. Anh. Aufg. 10. b.)

17. a. Jede (innere oder äußere) Medianebene einer Kante eines Vierflachs teilt die gegenüberliegende Kante in zwei Teile, die sich verhalten wie die der ersten Kante anliegenden Flächen. (III. 12. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

b. Jede (innere oder äußere) Mediane eines Vierflachs schneidet die gegenüberliegende Fläche in einem Punkte, dessen Verbindungslinien mit den drei Ecken der Fläche diese in drei Teile teilen, die sich verhalten wie die drei anliegenden Flächen.

18. a. Läßt sich in einem Vierflach eine Kugel beschreiben, die sämtliche sechs Kanten innerhalb der Kanten berührt, so sind die drei Summen je zweier Gegenkanten gleich.

b. Sind die drei Summen je zweier Gegenkanten eines Vierflachs gleich, so schneiden sich die Senkrechten, die auf den vier Flächen in den Mittelpunkten ihrer einbeschriebenen Kreise errichtet werden, in einem Punkt, welcher der Mittelpunkt der in diesem Falle vorhandenen kantenberührenden Innenkugel ist. Außerdem gibt es sechs Kugeln, von denen jede eine Kante und die Verlängerungen der vier anliegenden Kanten berührt.

19. a. Ein Vierflach wird von einer zu zwei Gegenkanten parallelen Ebene nach einem Parallelogramm geschnitten, das die von den zwei Kanten gebildeten Winkel enthält. Insbesondere bilden die Mittelpunkte der vier geschnittenen Kanten die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der zwei Gegenkanten sind. Jedes Vierflach hat 3 solche Mittelparallelogramme. (Vgl. I. Anh. 14 und 13. a.)

b. Die drei Mitteltransversalen (d. i. die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten) eines Vierflachs schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in demselben gegenseitig. (Sie bilden die Diagonalen der drei Mittelparallelogramme.) — Die Mittelpunkte aller zu zwei Gegenkanten parallelen Schnittparallelogramme liegen auf der zugehörigen Mitteltransversale.

c. Zieht man in jeder der vier Flächen eines Vierflachs die drei Verbindungsstrecken der Kantenmitten, so bilden diese 12 Strecken die Kanten eines dem Vierflach einbeschriebenen Achtflachs (Oktaeders im weiteren Sinn), das die drei Mittelparallelogramme zu Diagonalflächen und die drei Mitteltransversalen zu Diagonalen hat. Es kann als 6-seitiges Prismatoid, und zwar mit jeder seiner acht Flächen als Grundfläche, betrachtet werden. — Das Vierflach bildet den Halbflächner des Achtflachs; es kann nämlich aus dem Achtflach entstanden gedacht werden dadurch, daß von dessen 8 Flächen 4 nicht in einer Kante zusammenstoßende unterdrückt, und die 4 übrigen (die den vier ersten einzeln parallel sind) erweitert werden, bis sie sich schneiden.

d. Jedem Vierflach kann ein Parallelflach umbeschrieben werden, indem durch jede Kante eine Ebene parallel zu ihrer Gegenkante gelegt wird. Die Kanten des Parallelflachs sind gleich und parallel den Mitteltransversalen des Vierflachs. —

Umgekehrt können jedem Parallelflach zwei Vierflache einbeschrieben werden, deren Kanten die Diagonalen der Flächen des Parallelflachs sind. Sie haben die Mitteltransversalen und die Mittelparallelogramme gemein und stellen die 2 Halbflächner des ihren gemeinschaftlichen Kern bildenden einbeschriebenen Achtflachs vor, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Parallelflachs bilden, und das dem Parallelflach zugeordnet heißt. Die zwei Vierflache, von denen jedes das Gegenvierflach des andern heißt, sind entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch; sie liegen ähnlich und haben den Schnittpunkt der Mitteltransversalen zum Ähnlichkeitspunkt (III. Anh. 4. b). Jedes ist gleich dem dritten Teil des Parallelflachs.

e. Legt man durch die Mitte jeder Kante eines Vierflachs eine Ebene senkrecht zu ihrer Gegenkante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkt, welcher symmetrisch liegt mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel in Beziehung auf den Schnittpunkt der Mitteltransversalen. (Satz von Monge. — Bew. mit Hilfe des Gegenvierflachs.)

20. Die Schwerpunkte aller Parallelschnitte einer Pyramide liegen in einer Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und die Schwerlinie der Pyramide heißt.

21. a. Die sechs Schwerebenen eines Vierflachs (d. s. die durch je eine Kante und die Mitte der Gegenkante gelegten Ebenen) schneiden sich zu je dreien nach den vier Schwerlinien des Vierflachs und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Schwerpunkt des Vierflachs heißt. Die vier Schwerlinien teilen sich im Schwerpunkt gegenseitig im Verhältnis 3 zu 1, so daß die größeren Abschnitte an die Ecken stoßen. — Die vier Pyramiden, in die das Vierflach vom Schwerpunkt aus zerlegt werden kann, haben gleichen Inhalt.

b. Der Schwerpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen, und also identisch mit dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Achtflachs und des umbeschriebenen Parallelflachs.

Anm. Besteht ein Körper aus zwei Teilen, deren Rauminhalte $= k_1$ und k_2, und deren Schwerpunkte s_1 und s_2 sind, so erhält man den Schwerpunkt S des ganzen Körpers, wenn man $s_1 s_2$ im Verh. $s_1 S : S s_2 = k_2 : k_1$ teilt.

† 22. Teilt man die Schwerlinie (III. Anh. 20) einer mehrseitigen Pyramide im Verhältnis 3 zu 1 so, daß der größere Abschnitt an die Spitze stößt, so ist der Teilpunkt der Schwerpunkt der Pyramide. (Satz von Lionardo da Vinci. — Man zerlege die Pyramide durch Diagonalschnitte in Vierflache.)

Mittels dieses Satzes kann man gemäß der vorstehenden Anm. von jedem Polyeder den Schwerpunkt konstruieren, indem man es in Pyramiden zerlegt (III. Einl. 9).

23. a. Die Summe der Quadrate zweier Gegenkanten eines Vierflachs vermehrt um das 4-fache Quadrat der zugehörigen Mitteltransversale ist gleich der Summe der Quadrate der vier andern Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der drei Mitteltransversalen ist gleich $\frac{1}{4}$ der Quadratsumme der sechs Kanten.

24. a. Das Quadrat einer Schwerlinie eines Vierflachs ist gleich $\frac{1}{3}$ der Quadratsumme der von der nämlichen Ecke ausgehenden drei Kanten weniger $\frac{1}{9}$ der Quadratsumme der drei übrigen Kanten. (Ist in einem $\triangle$ ABC die S. BC in M im Verh. $BM : MC = 1:2$ geteilt, so ist: $2\,AB^2 + AC^2 = 3\,AM^2 + 6\,BM^2$.)

b. Die 9-fache Quadratsumme der vier Schwerlinien ist gleich der 4-fachen Quadratsumme der sechs Kanten.

c. Die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den vier Ecken ist gleich der Quadratsumme der drei Mitteltransversalen. (III. Anh. 23. b.)

25. a. Der Inhalt eines Vierflachs ist doppelt so groß als der Inhalt einer Pyramide, die ein Mittelparallelogramm zur Grundfläche und die kürzeste Entfernung der zwei ihm parallelen Gegenkanten zur Höhe hat. (III. 16.)

b. Jede durch eine Mitteltransversale eines Vierflachs gelegte Schnittebene teilt das Vierflach in zwei gleiche Teile. (Satz von Bobillier. — Die zwei Pyramiden, die zwischen der Schnittebene und einem durch die Mitteltransversale gehenden Mittelparallelogramm liegen, sind gleich.)

26. a. Das rhombische Vierflach oder Sphenoid. Haben in einem Vierflach je zwei gegenüberliegende Kanten gleiche Länge, so sind alle vier Flächen kongruent, und die Dreikante an allen vier Ecken kongruent; das Vierflach ist also gleicheckig-

gleichflächig und heißt Sphenoid. Das Netz eines solchen erhält man, wenn man durch die Ecken eines beliebigen, als Seitenfläche gewählten Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten zieht. Im Sphenoid sind die drei Mittelparallelogramme Rhomben, (daher auch die Bezeichnung: rhombisches Vierflach). Die drei Mitteltransversalen stehen auf einander senkrecht. Das einbeschriebene Achtflach (III. Anh. 19. c) hat lauter kongruente Flächen. Das umbeschriebene Parallelflach (III. Anh. 19. d) ist ein Quader.

b. Das symmetrische Sphenoid hat kongr. gleichschenklige Dreiecke zu Flächen. Es hat also 4 gleiche Kanten (Gegenkanten-Paare); die zwei andern Kanten sind zu einander rechtwinklig. Die Dreikante sind gleichschenklig. Ein Mittelparallelogramm ist quadratisch, die zwei andern sind kongruent. Zwei Mitteltransversalen sind gleich.

27. a. Das Oblong-Vierflach. Bilden in einem Vierflach zwei Kanten mit ihren Gegenkanten rechte Winkel, so ist dies auch für das dritte Kantenpaar der Fall. Die drei Mittelparallelogramme sind Rechtecke, (daher die Bez.: Oblong-Vierflach). Die drei Mitteltransversalen sind gleich. Die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten ist konstant. Das einbeschriebene Achtflach besitzt eine umbeschriebene Kugel. Das umbeschriebene Parallelflach ist ein Rhomboeder (im weiteren Sinn).

b. Im Oblong-Vierflach schneiden sich die vier Höhen in einem Punkt (was beim allgemeinen Vierflach nicht der Fall ist). Durch diesen Punkt gehen auch die kürzesten Entfernungen der drei Paare von Gegenkanten.

c. Im Oblong-Vierflach liegen die Fußpunkte der vier Höhen, die Schwerpunkte der vier Seitenflächen, sowie die Punkte, welche die oberen Abschnitte der vier Höhen vom Höhenschnittpunkt aus im Verhältnis 1 : 2 teilen, auf einer Kugelfläche (Feuerbach'sche Kugel), deren Halbmesser gleich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der umbeschriebenen Kugel ist, und deren Mittelpunkt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel im Verhältnis 1:2 teilt. (Satz von H. Vogt. — Die Teilpunkte zweier Höhenabschnitte und die Schwerpunkte der zugehörigen zwei Seitenflächen bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist. Das durch die vier Teilpunkte der Höhenabschnitte bestimmte Vierflach ist mit dem Haupt-Vierflach ähnlich und ähnlich liegend.)

28. In jedem Vierflach ist der reziproke Wert des Halbmessers der einbeschriebenen Kugel gleich der Summe der reziproken Werte der vier Höhen und gleich der halben Summe der reziproken Werte der vier Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln. (Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Seitenflächen, h_1, h_2, h_3, h_4 die zugehörigen Höhen, r_1, r_2, r_3, r_4 die Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln, r der Halbm. der einbeschriebenen Kugel, so ist:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{h_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{h_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{h_3}} = \frac{a_4}{\frac{1}{h_4}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{1}{r}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4}{\frac{1}{r_4}} \text{ u. s. w.)}$$

29. a. Zieht man in einem Vierflach von den Ecken A, B, C, D nach den gegenüberliegenden Flächen vier Strecken AA′, BB′, CC′, DD′, die sich in einem Punkte O schneiden, so ist:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1, \text{ und: } \frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$$

(Mittels der Verh. der vier Teilpyramiden zum ganzen Vierflach.)

b. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Vierflachs die Senkrechten auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einer Senkrechten und der ihr parallelen Höhe = 1.

c. Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes im Innern eines regul. Tetraeders von den vier Flächen ist konstant, und zwar gleich der Höhe des Tetraeders.

30—37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf.

30. a. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant ist, sind die Winkel der Grundfläche alle spitz; die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche fallen in die Höhen der Grundfläche, die Projektion der Spitze fällt in den Schnittpunkt der Höhen.

b. Das Quadrat der Grundfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

31. a. Um jede reguläre Pyramide und in jede reguläre Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

b. Um jeden regul. Pyramidenrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben.

c. In einen Kegelrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn die Mantellinie gleich der Summe der Grundkreis-Halbmesser ist.

32. a. Stellt man das Netz einer Pyramide dadurch her, daß man längs den Seitenkanten aufschneidet und die Seitenflächen durch Drehung um die Grundkanten in die Ebene der Grundfläche umlegt, so schneiden sich in dieser Netzfigur die Senkrechten, die von den freien Ecken der Seitenflächen auf die zugehörigen Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, welcher den Fußpunkt der Höhe der Pyramide vorstellt.

b. In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer als die Grundfläche.

c. Legt man in einem Prisma oder Pyramidenrumpf zwei Seitenflächen, die eine Seitenkante BB' gemein haben, durch Drehung um die Grundkanten AB und BC in die Ebene der unteren Grundfläche um, so schneiden sich die Senkrechten, die von den zwei Umlegungen des Punktes B' auf die entsprechenden Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, der die Projektion der Ecke B' auf die untere Grundfläche vorstellt.

33. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, ist ein Halbkreis.

34. Wird eine reguläre quadratische Pyramide von einer durch eine Grundkante gelegten Schnittebene halbiert, so werden zwei Seitenkanten von ihr golden geschnitten. (III. 16. Zus. 2.)

35. Der Rauminhalt eines Polyeders, in das sich eine Kugel einbeschreiben läßt, ist gleich $\frac{1}{3}$ mal Oberfläche mal Halbmesser der einbeschriebenen Kugel.

36. Haben zwei dreiseitige Pyramiden an den Spitzen entsprechend-gleiche Dreikante, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Produkte ihrer Seitenkanten.

37. a. Verhalten sich in einem Pyramidenrumpf zwei entsprechende Seiten der Grundflächen G und G' wie m zu m', und teilt ein Parallelschnitt die Höhe im Verhältnis $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{m'}$, so daß der größere Abschnitt an die größere Grundfläche stößt, so ist die Schnittfigur: $S = \sqrt{GG'}$. Der Inhalt des Pyramidenrumpfes ist also gleich der Summe der drei Pyramiden, welche die drei Flächen G, G', S zu Grundflächen und die Höhe des Pyramidenrumpfes zur Höhe haben.

b. Der Rauminhalt eines Kegelrumpfes ist gleich einem Cylinder von der gleichen Höhe und einem Halbmesser gleich der halben Summe der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes, plus einem Kegel von der gleichen Höhe und einem Grundkreis-Halbmesser gleich der halben Differenz der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes.

38—39: Prismatoid.

38. a. Der Inhalt eines Prismas, dessen Grundflächen Trapeze sind, ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den zwei parallelen Seitenflächen — mal ihrer Entfernung.

b. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen Parallelflachs ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den vier Parallelkanten oder zwischen zwei gegenüberliegenden Parallelkanten — mal dem zu ihnen senkrechten Querschnitt. (III. 16. Zus. 2.)

39. a. Ein Prismatoid werde auf die Ebene seiner unteren Grundfläche G projiziert; die obere Grundfläche (Deckfläche) sei D. Die algebr. Summe der Projektionen derjenigen Seitenflächen, die mit D eine Kante gemein haben, (Oberdreiecke) werde durch O, diejenige der übrigen Seitenflächen (Unterdreiecke) durch U bezeichnet; so zwar, daß in den zwei algebr. Summen jede Fläche mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen wird, je nachdem sie sich mit obenliegender Außenseite oder Innenseite projiziert. Man hat dann stets: $D + O + U = G$. Ist die Höhe des Prismatoids $= h$, so ist sein Inhalt: $K = \frac{h}{3}(3D + 2O + U)$ oder $= \frac{h}{3}(2D + G + O)$. (Satz von C. Gusserow.) (Man berücksichtige auch den Fall, daß zwei Seitenflächen, die einen einspringenden Keil einschließen, in der Projektion auf die nämliche Seite der Keilkante zu liegen kommen, so daß in der Nähe der Kante die Polyederoberfläche von einer zur Grundfläche senkrechten Linie in vier Punkten geschnitten wird.)

b. Ist die Höhe eines Prismatoides $= h$, eine Grundfläche $= G$, und derjenige Parallelschnitt, der von G eine Entfernung $= \frac{h}{3}$ hat, $= S$, so ist der Inhalt: $K = \frac{h}{4}(G + 3S)$.

40—46: Kugel und Umdrehungskörper.

† 40. Werden zwei Körper von verschiedenen Höhen durch jedes Paar Ebenen, die zu den Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so verhalten sich die Rauminhalte der zwei Körper wie ihre Höhen. (Bew. ähnlich wie III. 11, mittels III. 8. Zus. 1.)

41. a. Wird ein Kreisabschnitt um den mit seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der den gleichen Inhalt hat wie die über der Sehne als Durchmesser beschriebene Kugel. (III. 11. Zus.)

b. Wird ein Kreisabschnitt um einen beliebigen, ihn nicht schneidenden Durchmesser seines Kreises gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der sich zu der über der Sehne als Durchmesser beschriebenen Kugel verhält wie die Projektion der Sehne auf die Drehachse zur Sehne. (III. Anh. 40.)

42. Beschreibt man einer Kugel einen Kegelrumpf um, so daß sie von den beiden Grundkreisen und dem Mantel berührt wird, so ist der Raum zwischen den Oberflächen der Kugel und des Kegelrumpfes gleich der Summe der zwei Kegel, welche die Grundkreise des Kegelrumpfes zu Grundkreisen und den Mittelpunkt des Berührungskreises zur gemeinschaftlichen Spitze haben. (Verallgemeinerung von III. 17. a, Beweis.)

43. Zieht man in den zwei Grundkreisen einer Kugelzone zwei parallele Durchmesser und bezeichnet die Verbindungsstrecken der zwei Endpunkte des einen Durchmessers mit einem Endpunkt des andern durch s und s', so ist die krumme Oberfläche der Zone $= s s' \pi$. (Verallgem. von III. 18. Zus. 2.)

44. a. Berühren zwei zu einander senkrechte windschiefe Gerade eine Kugel in den Endpunkten eines Durchmessers, und schneidet man auf einer derselben eine Strecke gleich dem Durchmesser, auf der andern eine Strecke gleich der Großkreis-Peripherie der Kugel beliebig ab, so werden das durch die vier Endpunkte der Strecken bestimmte Vierflach und die Kugel von jeder zum Berührungsdurchmesser senkrechten Ebene nach flächengleichen Figuren geschnitten (Satz von A. Schmidt. — Hiernach Berechnung von Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.)

b. Ein Kreuzsatteldach entsteht dadurch, daß zwei kongruente Satteldächer mit gleichschenkl. Dreiecken als Stirnflächen auf gemeinschaftl. quadratischer Basis ruhen und sich so durchdringen, daß die Firstkanten sich rechtwinklig schneiden und gegenseitig halbieren. Ist die Grundfläche des Kreuzsatteldaches gleich dem Grundkreis, und seine Höhe gleich dem Halbmesser einer Halbkugel, so haben irgend zwei Parallelschnitte beider Körper in gleichen Abständen von den Grundflächen — gleichen Flächeninhalt. (Man betrachte das Kreuzsatteldach als Differenz eines Quaders und vier quadratischer Pyramiden.)

c. Die Prismatoidformel (III. 16) gilt auch für Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.

d. Hat ein Faß- oder Kessel-förmiger Körper zu einer Kugelzone, bezw. einem Kugelabschnitt eine solche Beziehung, daß die zwei Körper von jedem Paar Ebenen, die zu den beiderseitigen Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten werden, so gilt für den Körper die Prismatoidformel. (III. Anh. 40.) Daher giebt die Prismatoidformel brauchbare Näherungswerte für die Berechnung von Fässern und Kesseln, deren krumme Oberfläche geometrisch nicht genau definiert ist. Ist also die (innere) Höhe eines Fasses $= h$, der Bodendurchmesser $= d$, der Spunddurchmesser $= D$, so kann man setzen: $K = \frac{\pi h}{12} (d^2 + 2D^2)$.

45. Dreht man ein Dreieck um eine seiner Schwerlinien als Achse, so beschreiben seine beiden Teile gleich große Rotationskörper. — Die Inhalte der drei durch Drehung um die drei Schwerlinien erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie die reziproken Werte der Schwerlinien.

46. Dreht man eine ebene Figur, die aus zwei symmetrischen Hälften besteht, um eine sie nicht schneidende Achse, die parallel zur Symmetralachse ist, so ist die halbe Differenz der Inhalte oder Oberflächen der von den zwei Hälften beschriebenen Umdrehungskörper gleich dem Inhalt oder der Oberfläche des Umdrehungskörpers, der durch Drehung der Figur um ihre Symmetralachse entsteht.

47–63: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Regul. Krystallsystem.

47. a. Je zwei Gegenkanten eines regul. Tetraeders sind zu einander senkrecht. Die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte stellt ihre kürzeste Entfernung vor.

b. Bei Dodekaeder und Ikosaeder sind 5 Gruppen von je 3 Paaren paralleler Kanten vorhanden, deren Richtungen zu einander senkrecht sind.

48. Für jedes regul. Polyeder läßt sich eine Kugel konstruieren, die sämtliche Kanten in deren Halbierungspunkten berührt. Ihr Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der ein- und der umbeschriebenen Kugel zusammen.

49. a. Die Mittelpunkte der Flächen eines regul. Polyeders bilden die Ecken eines andern, dem ersten zugeordneten regul. Polyeders. (Vgl. III. 4. Zus.)

b. Ist einer Kugel ein regul. Polyeder einbeschrieben, und legt man in seinen Ecken die Berührungsebenen an die Kugel, so schließen diese ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein; und umgekehrt.

c. Die Ebenen, die durch die Endpunkte der von je einer Ecke ausgehenden Kanten eines regul. Polyeders — oder durch Punkte dieser Kanten, die von der Ecke gleich weit abstehen — gelegt werden, schließen ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein.

Man sagt daher, die Flächen des einen von zwei zugeordneten regul. Polyedern s t u m p f e n d i e E c k e n des andern a b.

50. Die Ecken jedes der in II. Anh. Aufg. 61 besprochenen fünf Netze von regul. sphär. Vielecken auf einer Kugeloberfläche bilden die Ecken eines der Kugel einbeschriebenen — oder die Berührungspunkte der Flächen eines der Kugel umbeschriebenen regul. Polyeders. (Hiernach kann man auch von der Sphärik aus zu den regul. Polyedern gelangen, und zwar reichen hiezu die drei regul. Dreiecksnetze aus.)

51. Haben zwei einander zugeordnete regul. Polyeder gleiche Halbmesser der umbeschriebenen Kugeln, so haben sie auch

a. gleiche Halbmesser der ihren Flächen umbeschriebenen Kreise, und daher auch gleiche Halbmesser der einbeschriebenen Kugeln. (Die sphär. Mittelpunkte der den Flächen des einen umbeschr. Kreise bilden die Ecken eines mit dem andern kongr. Polyeders.)

b. Das Produkt der Halbmesser der kantenberührenden Kugeln ist gleich dem Produkt der Halbmesser der einbeschriebenen und der umbeschriebenen Kugel: $\rho\rho' = rR$. (Bei der in a. angedeuteten Lage liegt je ein ρ und ein R des einen Pol. bezw. mit einem ρ' und einem r des andern in der nämlichen Geraden.)

c. Die Rauminhalte der zwei Polyeder verhalten sich wie die Halbmesser ihrer kantenberührenden Kugeln. (Satz von Dostor.)

52. a. Unter den Ecken eines Würfels sind 2 Gruppen von je 4 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines regul. Tetraeders sind; die Tetraederkanten werden durch Quadratdiagonalen vorgestellt. (Vgl. III. Anh. 19. d.)

b. Unter den Ecken eines Dodekaeders sind 5 Gruppen von je 8 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines Würfels sind; die Würfelkanten werden durch Fünfecksdiagonalen vorgestellt (III. Anh. 47. b). Das Dodekaeder kann aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen sechs Flächen kongruente Walmdächer aufsitzen; jede Dreiecksfläche eines Walmdaches bildet mit einer Trapezfläche eines andern zusammen ein regul. Fünfeck.

53. a. Unter den Flächen eines regul. Oktaeders sind 2 Gruppen von je 4 Flächen vorhanden, die (erweitert gedacht) zugleich Flächen eines regul. Tetraeders sind. (Vgl. III. Anh. 19. c und d.)

b. Unter den Flächen eines Ikosaeders sind 5 Gruppen von je 8 Flächen vorhanden, die zugleich Flächen eines Oktaeders sind. (III. Anh. 52. b und 49. b.)

54. a. Die Mitten der 6 Kanten eines Tetraeders bilden die Ecken eines Oktaeders. (Vgl. III. Anh. 19. c.)

b. Die Mitten der 12 Kanten eines Würfels oder eines Oktaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 8 kongr. regul. Dreiecken und 6 kongr. Quadraten besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

c. Die Mitten der 30 Kanten eines Dodekaeders oder eines Ikosaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 20 kongr. regul. Dreiecken und

12 kongr. regul. Fünfecken besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

Durch Erweiterung der Flächen der in a, b, c genannten Polyeder erhält man je zwei zugeordnete regul. Polyeder in sternförmiger Durchdringung (zwei zugeordnete regul. Polyeder „im Gleichgewicht".)

55. Legt man durch jede Kante eines regul. Polyeders eine Ebene, die mit den anstoßenden Flächen gleiche Keile bildet und das Polyeder nicht schneidet, so umschließen diese Ebenen

a. beim Tetraeder die Flächen eines Würfels. (Vgl. III. Anh. 52. a.)

b. Beim Würfel und beim Oktaeder umschießen die 12 Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Dodekaeder oder Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 12 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Würfelkanten, deren größere Diagonalen die Oktaederkanten sind. Es hat 14 Ecken; an den 8 Würfelecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 6 Oktaederecken kongr. regul. Vierkante.

c. Beim Dodekaeder und beim Ikosaeder umschließen die durch die 30 Kanten gelegten Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Triakontaeder oder ikosaedrisches Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 30 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Dodekaederkanten, deren größere die Ikosaederkanten sind. Es hat 32 Ecken; an den 20 Dodekaederecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 12 Ikosaederecken kongr. regul. Fünfkante.

Man sagt, die in a, b, c genannten Polyeder stumpfen die Kanten der ursprüngl. Polyeder ab. — Die beiden Granatoeder heißen auch Keplerische Körper.

56. Die Flächen der in 55. a, b, c genannten Polyeder berühren die kantenberührende Kugel des ursprünglichen Polyeders; die Berührungspunkte fallen in die Mittelpunkte der Flächen und bilden die Ecken der in 54. a, b, c genannten Körper, (die Flächen der ersteren stumpfen die Ecken der letzteren ab). Die Diagonalen der Flächen der in 55 genannten Polyeder bilden die scharfen Kanten der in 54 (Schlußbemerkung) genannten sternförmigen Körper.

57. a. Das oktaedr. Granatoeder kann in 4 kongr. stumpfe Rhomboeder (vgl. III. Einl. 5. b) zerlegt werden. (4 Würfelecken des Granatoeders, die zugleich Tetraederecken sind, stellen von jedem Rhomboeder eine Hauptecke vor, die 4 andern Hauptecken liegen im Mittelpunkt.)

b. Die 6 Granatoederflächen, welche an dem als 6-seitiges Prismatoid aufgefaßten Oktaeder die Seitenkanten abstumpfen, gehören einem regul. 6-seitigen Prismenmantel an, dessen 6 Kanten der Prismatoid-Höhe parallel sind. Das Granatoeder kann (in 4-facher Weise) aufgefaßt werden als 6-seitiges Prisma, das durch je 3 Flächen oben und unten dachförmig (rhomboedrisch) zugespitzt ist. Sämtliche Keile sind $= 120^\circ$.

Beim ikosaedr. Granatoeder sind 6 Gruppen von je 10 Flächen vorhanden, die einem regul. 10-seitigen Prismenmantel angehören. Jeder Keil ist $= 144^\circ$.

c. Verbindet man in einem regulären 6-seitigen Prisma einen auf der oberen Verlängerung der Prismenachse beliebig gewählten Punkt mit drei nicht auf einander folgenden Ecken der oberen Grundfläche und legt durch je zwei Verbindungslinien eine Ebene, so schließen diese drei Ebenen zusammen mit dem Prismenmantel und der untern Grundfläche einen Körper ein, der von 3 kongr. Rhomben, 6 kongr. Trapezen und einem regul. Sechseck begrenzt ist. Er hat stets den gleichen Rauminhalt, wie auch der Punkt auf der Achse angenommen werden mag. Die Oberfläche dagegen ist veränderlich; sie ist am kleinsten für diejenige Annahme, welche mit der Granatoederform übereinstimmt. (Form der Bienenzellen.)

---

58. Die 6 Ecken eines Oktaeders seien mit A, die Mittelpunkte seiner 8 Flächen mit f, die Mittelpunkte seiner 12 Kanten mit k bezeichnet, sein Mittelpunkt sei O. Auf den 6 Strahlen OA seien ferner 6 gleiche Strecken $OB > OA$ abgeschnitten. Die 6 Strahlen OA bilden die Kanten von 8 Oktanten. 3 Punkte A oder B, die auf verschiedenen Kanten des nämlichen Oktanten liegen, werden im folgenden diesem Oktanten *zugehörig* genannt. Ein Punkt, der auf einem Strahl Of oder Ok liegt, wird mit F oder K bezeichnet.

a. Legt man durch je 3 Punkte A, A und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenoktaeder heißt*). Es kann nämlich aufgefaßt werden als Oktaeder, auf dessen 8 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die Spitzen F dieser Pyramiden liegen auf den Strahlen Of und bilden die Ecken eines Würfels. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. An den 8 Würfelecken F befinden sich kongr. regul. 3-kante, an den 6 Oktaederecken A: kongr. (nicht regul.) 8-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die 8-kante regulär, der Körper gehört also dann zu den gleichflächig-halbregulären Polyedern. — Wird OB $= \infty$ gewählt, so fallen je zwei an eine Oktaederkante anstoßende Dreiecksflächen in eine Ebene: das Pyramidenoktaeder geht in das Granatoeder über.

b. Legt man durch je 3 Punkte A, B und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Leuzitoeder heißt. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. Deltoide (Vierecke, die in Beziehung auf eine Diagonale symmetrisch sind). Der Körper hat 26 Ecken von 3erlei Art, nämlich: 6 Oktaederecken A, 8 Ecken F (Würfelecken), 12 Ecken K (welche die Ecken des in Anh. 54. b genannten Körpers bilden). Die 48 Kanten sind von 2erlei Art; die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. regul. 3-kante, an den Ecken K: kongr. (nicht regul.) 4-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die letztgenannten 4-kante regul., das Polyeder ist also gleichflächig-halbregulär. — Ist OB $= 2$ OA, so bilden die Hauptdiagonalen der Deltoide die Kanten eines Granatoeders, der Körper stumpft alsdann die Kanten des Granatoeders ab. — Wird OB $= \infty$ gewählt, so geht das Leuzitoeder in den Würfel über.

c. Legt man durch je 2 dem nämlichen Oktanten zugehörige Punkte A und B parallel zu seiner dritten Kante eine

---

*) Um hier und im folgenden rasch eine Vorstellung von dem fraglichen Körper zu gewinnen, betrachte man jedesmal zunächst nur die zu einem Oktanten gehörigen Ebenen.

Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenwürfel heißt und aufgefaßt werden kann als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die 24 Flächen sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. Der Körper hat 6 Ecken A und 8 Ecken F (Würfelecken). An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. (nicht regul.) 6-kante. — Ist $OB = 2\,OA$, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär, (Krystallform von Gold und Silber). — Ist $OB = OA$, so geht der Pyramidenwürfel in das Granatoeder über.

Die Flächen des (allgem.) Pyramidenwürfels stumpfen die gebrochenen Oktaederkanten eines Leuzitoeders ab. Umgekehrt stumpfen die Flächen des Leuzitoeders die Pyramidenkanten eines Pyramidenwürfels ab.

59. Auf den 6 Halbdiagonalen OA eines Oktaeders seien 6 gleiche Strecken OB und 6 gleiche Strecken OC abgeschnitten, und zwar sei $OC > OB > OA$. Im übrigen mögen die nämlichen Bezeichnungen gelten wie in 58. — Legt man durch je 3 Punkte A, B, C die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 48 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Achtundvierzigflächner oder Diamantoeder heißt. Die 48 Flächen sind kongr. ungleichseitige Dreiecke. Der Körper hat 26 Ecken, und zwar von dem nämlichen Charakter wie das Leuzitoeder (6 Ecken A, 8 Ecken F, 12 Ecken K). Vergleicht man das Diamantoeder mit dem Leuzitoeder, so erscheinen die Deltoidflächen des letzteren längs ihren Hauptdiagonalen gebrochen. — Für den Fall, daß $\frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OA}$ ist, liegen je zwei Ecken A mit zwei Ecken F in einer Ebene und bilden die Ecken eines Rhombus; man hat dann die spezielle Form des Pyramidengranatoeders. — Die 72 Kanten des Diamantoeders sind von 3erlei Art: die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten, die 24 Kanten AF als Pyramidenoktaeder- oder Pyramidenwürfel-Kanten (eventuell als Granatoederkanten) bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. (nicht regul.) 8-kante, an den Ecken F — 6-kante, an den Ecken K — 4-kante. — Ist OB gleich 3 OA minus der Oktaederkante, und OC gleich

OA plus der doppelten Oktaederkante: so ist der Körper gleich-flächig-halbregulär. (Zum Beweis betrachte man die Schnittfigur einer durch zwei Strahlen OA und Of gelegten Ebene. In dieser seien A, F, K drei auf einander folgende Ecken. Macht man kl parallel und gleich-gerichtet mit OA und gleich der halben Oktaederkante, so muß KF durch l gehen, wenn das Vierkant bei K regul. sein soll. Schneiden sich ferner FK und Ak in m, so muß Fm = FA sein, wenn das 6-kant bei F regul. sein soll. Da sich nun Ak und OF in f schneiden, und fk = $\frac{1}{2}$ fA ist, so muß sein: km = $\frac{1}{3}$ Ak; folglich, wenn OA und KF sich in B schneiden: OB — OA = 4 kl, u. s. w.)

Anm. Oktaeder, Pyramidenoktaeder, Granatoeder, Leuzitoeder, Würfel, Pyramidenwürfel, Diamantoeder stellen die 7 einzig möglichen (vollständigen) Formen des regulären Krystallsystems vor. Das Diamantoeder ist die allgemeinste Form, von der die 6 übrigen als spezielle Fälle angesehen werden können. — Uebrigens sind krystallographisch nur solche Formen möglich, für welche die Achsenabschnitte OA, OB, OC in rationalem Verhältnis stehen. Es haben daher die in 58. a. u. b und in 59 erwähnten halbregulären Formen nur geometrisches Interesse.

60. a. Unterdrückt man bei einem Pyramidenwürfel die Hälfte der Flächen und läßt die andere Hälfte bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so zwar, daß immer drei solche Flächen unterdrückt werden, die mit einer bleibenden Fläche eine Kante gemein haben, und umgekehrt: so entsteht (als Halbflächner des Pyramidenwürfels) ein von 12 Fünfecken begrenzter Körper, welcher Pyritoeder heißt (Krystallform des Schwefelkies mit OB = 2 OA). Ist im ursprüngl. Pyramidenwürfel OB = $\frac{1}{2}$ OA $(1+\sqrt{5})$, so ist der Körper identisch mit dem regul. Dodekaeder. Andernfalls sind die 12 Fünfecke nicht regulär, aber symmetrisch gestaltet. Der allgem. Körper kann (wie das regul. Dodekaeder, vgl. III. Anh. 52. b) aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. Walmdächer aufsitzen; doch haben deren Firstkanten eine andere Länge als die übrigen unter sich gleichen Kanten. — Läßt man die seither unterdrückten Flächen des Pyramidenwürfels bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so entsteht ein zweites, dem ersten kongr. Pyritoeder, welches das erste so durchdringt, daß je zwei

Firstkanten sich rechtwinklig durchschneiden und gegenseitig halbieren. („Zwilling des eisernen Kreuzes.")

b. Verfährt man beim Diamantoeder ebenso wie in a), so erhält man als Halbflächner einen von 24 (unsymmetr.) Fünfecken begrenzten Körper, welcher Gyroeder heißt. Geht man zunächst vom Pyramidengranatoeder aus, so verhält sich dessen Halbflächner zum Granatoeder ähnlich wie das Pyritoeder zum Würfel: er kann aufgefaßt werden als Granatoeder, auf dessen 12 Flächen rhombische (schief-symmetrisch gestaltete) Walmdächer aufsitzen. Beim allgemeinen Gyroeder erscheint die Grundfläche jedes Walmdaches längs einer Diagonale gebrochen. Der Körper hat 38 Ecken; die 6 Ecken A und 8 Ecken F des Diamantoeders sind geblieben, dazu kommen als neue Ecken (anstatt der 12 Ecken K) die 24 Endpunkte E der Firstkanten. An den Ecken A befinden sich regul. 4-kante, an F: regul. 3-kante, an E: nicht regul. 3-kante. Die 60 Kanten haben 3erlei Längen*).

61. a. Setzt man zwei kongruente regul. Pyramiden so an einander, daß die Grundflächen sich decken, so heißt der entstehende Körper eine Doppelpyramide. Sind die Keile an den Grundkanten der Pyramiden halb so groß als die Keile an den Seitenkanten, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär.

b. Sind die zwei Pyramiden 2n-seitig, und wendet man auf die Doppelpyramide dasselbe Verfahren an wie in 60, so erhält man als Halbflächner ein von 2n kongr. Deltoiden umschlossenes Polyeder, welches Trapezoeder heißt. Dasselbe entsteht auch, wenn man in einem regul. 2n-seitigen Prismatoid die Grundflächen unterdrückt und die Seitenflächen sich pyramidal erweitern läßt. — Ist in den zwei ursprüngl. Pyramiden die Grundkante $= a$, der Halbmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises $= R$, der Halbmesser der den zwei Pyramiden-Mänteln aus dem Mittelpunkt der Grundfläche einbeschriebenen Berührungskugel

---

*) Es giebt auch eine gleichflächig-halbreguläre Form des Gyroeders. Sie entsteht, wenn in dem ursprüngl. Diamantoeder zwischen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ die zwei Beziehungen gelten:

$$b^3 - ab^2 - a^2b - a^3 = 0, \qquad c^3 - 3ac^2 - a^2c - a^3 = 0.$$

Doch bietet die Ableitung dieser Beziehungen auf elementarem Wege Schwierigkeiten.

$= r$, und besteht die Beziehung: $r = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + a^2}}$, so ist das Trapezoeder gleichflächig-halbregulär. (Man drücke aus, daß die Berührungspunkte der Kugel mit drei an eine Fläche anstoßenden Flächen der Doppelpyramide die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden müssen. — Das 10-seitige halbregul. Trapezoeder ergiebt sich leicht aus dem regul. Dodekaeder.)

62. a. Um jedes gleich e c k i g - halbregul. Polyeder und i n jedes gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben. (Man betrachte, wie in III. 5, die je aus einer Fläche und deren Nachbarflächen — bezw. die je aus einer Ecke und deren Nachbarecken — bestehenden Gebilde.)

b. Ist einem gleich e c k i g - halbregul. Polyeder eine Kugel u m beschrieben, und legt man an sie in sämtlichen Ecken die Berührungsebenen, so umschließen diese ein gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder, das dem ursprünglichen z u g e o r d n e t oder r e z i p r o k heißt. Hat das ursprüngl. Polyeder ν regul. n-ecke, ν' n'-ecke, ν'' n''-ecke und π entspr.-gleiche p-kante, so hat das reziproke Polyeder ν regul. n-kante, ν' n'-kante, ν'' n''-kante und π kongr. p-ecke. — Umgekehrt: Ist einem gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder eine Kugel e i n beschrieben, so bilden die Berührungspunkte die Ecken des ihm reziproken gleich e c k i g - halbregul. Polyeders. — Zu jedem halbregul. Polyeder der einen Gattung ist daher ein bestimmtes ihm reziprokes der andern Gattung vorhanden; jede Gattung kann aus der andern abgeleitet werden.

c. Die entsprechend - gleichen Vielkante eines gleich e c k i g - halbregul. Polyeders sind solche, u m welche sich Kegelflächen beschreiben lassen. — Die kongr. Vielecke eines gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeders sind solche, i n welche sich Kreise beschreiben lassen.

63. a. Reziprok zu den in 61 genannten gleichflächig-halbregul. Doppelpyramiden und Trapezoedern sind die regul. Prismen mit quadratischen Seitenflächen und die regul. Prismatoide mit regul. Dreiecken als Seitenflächen. Außer diesen Körpern, deren Anzahl unbegrenzt ist, giebt es (und k a n n nur geben) von jeder Gattung der halbregul. Polyeder noch 13 Individuen. Ein Teil von ihnen ist im vorangehenden aufgeführt, die übrigen können auf ähnliche Weise erzeugt werden wie jene. Man kann

nämlich zu Pyramidenoktaeder und Pyramidenwürfel auch für die übrigen regul. Polyeder Analoga konstruieren. Ferner kann man die in 58, 59 und 60. b für das Oktaeder besprochenen Konstruktionen auch auf das Ikosaeder (Ecken A, Mittelpunkt O) anwenden, indem man mit Bez. auf die 20 von den Strahlen OA gebildeten Dreikante genau ebenso verfährt, wie beim Oktaeder mit Bez. auf die 8 Oktanten verfahren wurde. Die 13 gleichflächig-halbregul. Polyeder sind hiernach folgende: Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder; oktaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder; ikosaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder.

b. Hiemit sind (nach 62. b) zugleich auch die 13 möglichen gleicheckig-halbregul. Formen gefunden. Sie lassen sich übrigens auch direkt aus den regul. Polyedern durch regelmäßiges Abstumpfen ihrer Ecken und Kanten erzeugen, wozu in III. Anh. Aufg. 18. b die Anleitung gegeben wird. (Von ihnen auszugehen und aus ihnen die gleichflächig-halbregul. Formen nach 62. b abzuleiten, ist eigentlich der leichtere Weg. Doch bieten die letzteren das größere Interesse.)

II. Konstruktions-Aufgaben.

1—21: Konstruktionen von Polyedern und Polyedernetzen.

1. Von einer Pyramide sind die Grundfläche und zwei Seitenflächen gegeben. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden. (Die Seitenflächen findet man mit Hilfe von III. Anh. 32. a, die Höhe und die Keilwinkel an den Grundkanten mittels rechtw. Dreiecke, die Keilwinkel an den Seitenkanten wie W. α in II. Aufg. 6.)

2. a. Von einem Prisma sind geg: die Grundfläche und α) zwei an einander stoßende — β) zwei nicht an einander stoßende Seitenflächen. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer

Ebene gefunden werden. (III. Anh. 32. c. Im übrigen wie bei der vor. Aufg. — β führe man auf α zurück, indem man die den zwei geg. Seitenflächen angehörigen Grundkanten bis zu ihrem Schnitt verlängert. Letztere dürfen nicht parallel sein, wenn die Aufg. bestimmt sein soll.)

b. Die gleiche Aufgabe für einen Pyramidenrumpf.

3. Einen dreiseitigen Pyramidenrumpf zu konstr., wenn geg. sind: eine Grundfläche, eine Seite der andern Grundfläche, und die drei Seitenkanten.

4. Ueber einem geg. (spitzwinkligen) Dreieck als Grundfläche eine Pyramide zu errichten, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant sei. (II. Anh. 10 u. II. Aufg. 2. c führen auf die nämliche Lösung wie III. Anh. 30. a.)

5. Ein Vierflach zu konstr., von dessen Flächen die eine einem geg. Dreieck kongruent, eine zweite einem geg. Dreieck ähnlich, eine dritte mit einem geg. Dreieck inhaltsgleich sei.

6. Ein Vierflach zu konstr., von dem zwei Flächen geg. sind, und dessen Inhalt gleich einem geg. Würfel sei.

7. Ein Vierflach zu konstr., von dem eine Fläche und drei Höhen geg. sind. (Zwei Fälle zu berücksichtigen.)

8. Ein Vierflach zu konstr., von dem geg. sind: eine Fläche, die zugehörige Schwerlinie, und die Verhältnisse der von derselben Ecke ausgehenden Kanten. (II. Anh. 11. b.)

9. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die rechteckige Grundfläche, die Höhe, und die von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen gebildeten Keile. (II. Anh. 9.)

10. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche, der Rauminhalt, die Länge einer Seitenkante, und der Grundneigungswinkel einer zweiten Seitenkante.

11. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche und die Grundneigungswinkel einer Seitenfläche und der in dieser liegenden zwei Seitenkanten.

12. Von einem Parallelflach sind die Längen der von einer Ecke ausgehenden drei Kanten und die an ihnen befindlichen Keilwinkel gegeben. Es sollen die vier Diagonalen durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

13. Ein Rhomboeder zu konstr., von dem die Hauptdiagonale und ein Rhombenwinkel geg. sind. (2 Lösungen.)

14. In einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant werden von den Kanten drei geg. Strecken abgeschnitten und durch die Endpunkte Ebenen senkrecht zu den Kanten gelegt. Von dem durch diese drei Ebenen aus dem Dreikant ausgeschnittenen Körper soll das Netz konstr. werden. (Vgl. II. 5, zweiter Bew.)

---

15. Die Netze der fünf regul. Polyeder zu konstr.

16. a. Die Schnittfigur eines durch seine Kantenlänge geg. Dodekaeders oder Ikosaeders mit einer Ebene zu konstr., die durch zwei parallele Kanten geht. (Vgl. III. Anh. 47. b.)

b. Von jedem der fünf regul. Polyeder die Halbmesser der umbeschriebenen, der einbeschriebenen und der kantenberührenden Kugel, sowie den Keilwinkel an den Kanten durch Konstruktion in einer Ebene zu finden, wenn die Kantenlänge geg. ist. (Für Dodek. und Ikos. enthält die Schnittfigur der Aufg. a sämtliche gesuchten Stücke.)

17. Die Gestalt der Flächen der in III. Anh. 58, 59 und 60 aufgeführten Polyeder zu konstr., wenn die Achsenabschnitte OA, OB, OC geg. sind.

18. a. Die 13 gleich e c k i g - halbregulären Polyeder, die zu den in III. Anh. 63. a aufgezählten gleich f l ä c h i g - halbregulären reziprok sind, zu diskutieren. (III. Anh. 62. b.)

b. Diese Polyeder zu konstr. durch Abstumpfung der Ecken und Kanten der regul. Polyeder. (Stumpft man die Ecken von Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder, Dodekaeder so ab, daß aus jeder ursprünglichen Fläche ein regul. Vieleck von doppelter Seitenzahl wird, so erhält man die bezw. mit Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder reziproken. — Mit den beiden Granatoedern sind reziprok die Körper in III. Anh. 54. b u. c, vgl. 56. — Das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Leuzitoeder reziproke erhält man, wenn man Ecken und Kanten eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, so abstumpft, daß in jeder Fläche ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-ähnlich liegendes Vieleck entsteht, von dem immer zwei Ecken mit zwei Ecken eines benachbarten Vielecks die Ecken eines Quadrates bilden. — Stumpft man so ab, daß in jeder Fläche ein mit ihr konzentrisches Vieleck von doppelter Seitenzahl entsteht, und beobachtet im übrigen das nämliche wie vorhin, so erhält man die mit den beiden Diamantoedern reziproken*). — Zeichnet man in jeder Fläche eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-verdreht liegendes Vieleck von solcher Größe und Lage, daß immer zwei Ecken eines Vielecks mit zwei Ecken des in einer Nachbarfläche liegenden Vielecks ein aus zwei regul. Dreiecken bestehendes windschiefes Viereck bilden: so erhält man das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Gyroeder reziproke.)

c. Die Netze der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn die Kantenlänge geg. ist.

d. Die Kantenlängen der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel geg. ist.

e. Die Flächengestalt der 13 gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel geg. ist.

f. Für sämtliche halbregul. Polyeder die Keilwinkel an den Kanten durch ebene Konstr. zu finden.

19. a. Zwei kongr. Würfel von geg. Kantenlänge durchdringen sich so, daß sie eine Diagonale gemeinsam haben und um 180° gegen einander verdreht sind. Aus jeder Fläche des einen ragt eine Ecke des andern als dreiseitige Pyramide hervor. Schneidet man diese zwölf kongr. Pyramiden weg, so bleibt als Kern eine aus zwei regul. sechsseit. Pyram. bestehende Doppelpyramide übrig. Von diesem Kern, sowie von den zwölf Pyramiden sollen die Netze konstr. werden. (Salmiak-Zwilling.)

b. Zwei kongr. Oktaeder durchdringen sich so, daß, wenn sie als Prismatoide betrachtet werden, ihre Grundflächen in der nämlichen Ebene konzentrisch und um 180° gegen einander verdreht liegen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftliche Kern diskutiert und sein Netz konstruiert werden.

20. Zwei kongr. regul. sechsseitige Prismen, durch deren Achsen je eine Ebene senkrecht zu zwei parallelen Seitenflächen

---

*) Die mit den beiden Leuzitoedern und Diamantoedern reziproken kann man auch durch Abstumpfen der beiden Granatoeder erhalten, indem man in jeden Rhombus ein Quadrat einzeichnet, dessen Seiten den Rhombendiagonalen parallel sind, und dessen Ecken 1) auf den Rhombenseiten, 2) innerhalb der Rhomben liegen.

geht, werden so gelegt, daß diese zwei Ebenen zusammenfallen und die Achsen sich rechtwinklig schneiden. Es soll eine der zwei (ebenen) Schnittfiguren der Prismenmäntel in wahrer Größe gezeichnet und das Netz des den Prismen gemeinschaftlichen Kerns konstruiert werden.

21. Ein geg. stumpfes Rhomboeder wird durchdrungen von einem spitzen Rhomboeder, das mit dem stumpfen den Mittelpunkt, die Richtung der Hauptdiagonale und die einbeschriebene Kugel gemein hat, und dessen von einer Hauptecke ausgehende Kanten parallel sind mit den von der entsprechenden Hauptecke ausgehenden Rhombendiagonalen des stumpfen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftl. Kern ermittelt und dessen Netz gezeichnet werden. (Die Hauptecken des stumpfen Rhomboeders gehören auch dem Kernkörper an. In den 2 mal 6 Flächen der zwei Rhomboeder entstehen als Flächen des Kernkörpers 2 mal 6 symmetrisch gestaltete Fünfecke von zweierlei Art. Im stumpfen Rhomboeder sind zwei Fünfecksseiten parallel mit einer Rhombendiagonale; im spitzen fallen zwei Fünfecksseiten in Kanten, zwei andere sind diesen parallel. Mittels einer in einem gemeinschaftl. Diagonalschnitt beider Rhomboeder gezeichneten Hilfsfigur lassen sich in die beiderlei Rhomboederflächen die bezügl. Fünfecke leicht einzeichnen.)

22—35: Konstruktionen an Polyedern. Ebene Schnitte.

22. Im Innern eines geg. Vierflachs einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß seine Verbindungsebenen mit den 6 Kanten das Vierflach in vier dreiseitige Pyramiden teilen, deren Rauminhalte sich verhalten wie $m : n : p : q$.

23. a. Den Schwerpunkt eines Pyramidenrumpfes —

b. eines Körpers zu bestimmen, der aus zwei verschiedenen Kegelrümpfen mit gemeinschaftlicher Grundfläche zusammengesetzt ist. (III. Anh. 21. Anm.)

24. Den Mantel a) eines Kegels — b) eines Kegelrumpfes durch Parallelkreise in n gleiche Teile zu teilen.

25. a. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen zweier geg. Kugeln sei.

b. Die Halbmesser zweier Kugeln zu finden, wenn die

Summe ihrer Oberflächen gleich der Oberfläche einer geg. Kugel sein soll, und wenn die Summe oder die Differenz oder das Verhältnis beider Halbmesser geg. ist.

Anm. Die folgenden Aufgaben 26—29 über ebene Schnitte von Polyedern sollen ohne Benützung von I. Aufg. 6. durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden (I. Einl. 6. d).

26. Auf drei Kanten eines Parallelflachs, von denen a) je zwei — b) keine zwei der nämlichen Fläche angehören, sind drei Punkte gegeben. Die Schnittfigur der durch sie gelegten Ebene zu konstr. (Je zwei Seiten des Schnittpolygons schneiden sich verlängert auf der Schnittkante der zwei Flächen, in denen sie liegen. Bei b schneide man ein Stück von dem Parallelflach weg, indem man durch zwei geg. Punkte und die Kante, auf der einer von ihnen liegt, einen Schnitt führt, und betrachte zunächst den Restkörper.)

27. Die Schnittfigur einer mehrseitigen Pyramide mit einer Ebene zu zeichnen, welche drei a) auf einander folgende — b) nicht auf einander folgende Seitenkanten nach geg. Verhältnissen schneide. (Mittels der Schnittlinien von je zwei nicht an einander stoßenden Seitenflächen oder Diagonalschnitten.)

28. Die Schnittfigur einer Pyramide mit einer Ebene zu zeichnen, die durch eine in der Ebene der Grundfläche geg. Gerade und durch einen auf einer Seitenkante geg. Punkt gehe. (Die Seiten des Schnittpolygons und der Grundfläche schneiden sich je zu zweien auf der geg. Geraden.)

29. Geg. ein senkrechtes Prisma und eine in der Ebene seiner Grundfläche liegende Gerade. Das Prisma durch eine Ebene, die durch die Gerade gehe, so zu schneiden, daß die Schnittfigur einen geg. Winkel enthalte, dessen Spitze auf einer bestimmten Seitenkante liege. (Das von der Spitze des Winkels und den Spurpunkten seiner Schenkel gebildete Dreieck kann in umgelegter Lage leicht gezeichnet werden.)

30. Eine geg. vierseitige Pyramide nach einem gleichschenkligen Trapez zu schneiden, von dessen parallelen Seiten die eine in einer bestimmten Seitenfläche liege, die andere in der Grundfläche liege und eine geg. Länge habe.

31. Ein geg. Vierkant durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm von geg. Inhalt sei.

32. Einen Oktanten durch eine Ebene so zu schneiden, daß das Schnittdreieck einem geg. Dreieck kongruent sei. (Man findet die in den Seitenflächen liegenden rechtwinkl. Dreiecke entweder durch III. Anh. Aufg. 4 oder direkt durch Bestimmung ihrer Katheten.)

33. In einer Fläche eines regul. Tetraeders ist eine Gerade parallel einer Kante geg. Durch dieselbe eine Ebene so zu legen, daß sie das Tetraeder nach einem Trapez schneide, in das sich ein Kreis einbeschreiben läßt. (Die zwei Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten eines jeden durch die Gerade gehenden Schnitttrapezes liegen in zwei festen Ebenen.)

34. In einem geg. Sechseck sind die sechs Winkel gleich, und die erste, dritte und fünfte Seite haben gleiche Länge; es soll a) ein Oktaeder, b) ein Würfel gefunden werden, dem das Sechseck als Schnittfigur angehört.

35. Dieselbe Aufg. für ein Dodekaeder. (Wann erhält man 1, 2, 3 Lösungen?)

36—60: Ein- und umbeschriebene Polyeder.

(Lösung meist mit Hilfe von Ähnlichkeitspunkten oder dadurch, daß man sich zuerst durch Lösung der umgekehrten Aufgabe ein dem gesuchten ähnliches Gebilde verschafft.)

36. Einem geg. Kegel a) einen Würfel, b) ein Oktaeder einzubeschreiben, so daß eine Fläche in der Grundfläche des Kegels liege, die übrigen Ecken auf seinem Mantel liegen.

37. Einem geg. Kugelabschnitt a) ein gleicheckig-halbregul. n-seitiges Prisma, b) ein gleicheckig-halbregul. 2n-seitiges Prismatoid einzubeschreiben, so daß eine Grundfläche in der Grundkreisebene des Kugelabschnittes liege, die übrigen Ecken auf seiner Haubenfläche liegen. (Vgl. III. Anh. 63. a.)

38. In ein geg. Vierflach einen Würfel einzubeschreiben, so daß in einer Fläche des Vierflachs vier Würfelecken liegen, in einer zweiten Fläche zwei, in den zwei übrigen Flächen je eine.

39. In einen geg. Kugeloktanten einen Würfel einzubeschreiben, so daß eine seiner Flächen in einer Seitenfläche des Oktanten liege, zwei Kanten in den zwei andern Seitenflächen, und zwei Ecken auf der Kugelfläche.

40. Einen Kegelrumpf, von dem der Grundneigungswinkel der Mantellinien und a) das Verhältnis der Grundkreise, b) die Höhe geg. ist, in einen geg. Kugeloktanten so einzubeschreiben, daß ein Grundkreis auf der Kugeloberfläche liege, der andere Grundkreis die drei Seitenflächen des Oktanten berühre.

41. Einer geg. Kugel ein Vierflach einzubeschreiben, a) das einem geg. Vierflach ähnlich sei, b) dessen Flächen mit vier geg. Ebenen parallel seien.

42. Einer geg. Kugel a) ein gleicheckig-halbregul. 2n-seitiges Prismatoid einzubeschreiben, b) ein gleichflächig-halbregul. 2n-seitiges Trapezoeder umzubeschreiben. (Vgl. III. Anh. 61. b.)

43. Ein Vierflach zu konstr., das einem geg. Vierflach ähnlich sei, und von dessen Ecken jede auf der Oberfläche einer von vier geg. konzentrischen Kugeln liege. (II. Anh. 11. a.)

44. Einem geg. Vierflach einen Wulst (vgl. III. Aufg. 10) von geg. Verhältnis der Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises so einzubeschreiben, daß er jede Fläche berühre, und daß seine Achse einer geg. Geraden parallel sei.

45. In eine geg. Kugel acht gleiche Kugeln so einzubeschreiben, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines Würfels bilden, und daß jede die geg. Kugel und drei der übrigen Kugeln berühre.

46. Einer geg. Kugel vier andere Kugeln, von denen drei gleich groß seien und der Halbmesser der vierten zum Halbmesser der drei ersten ein geg. Verhältnis habe, so einzubeschreiben, daß jede die andern drei sowie die geg. Kugel berühre.

47. Einem geg. Würfel a) zwei gleiche Kugeln, b) zwei Kugeln, deren Halbmesser ein geg. Verhältnis haben, so einzubeschreiben, daß ihre Mittelpunkte auf einer Würfeldiagonale liegen, und daß sie einander und je drei in einer Ecke zusammenstoßende Flächen berühren.

48. Einem geg. Rhomboeder ein Oktaeder so einzubeschreiben, daß in jeder Rhomboederfläche eine Oktaederecke liege.

49. Einem Rhomboeder, von dem die Kantenlänge und ein Rhombenwinkel geg. ist, ist ein Cylinder von geg. Verhältnis des Halbmessers zur Höhe so einbeschrieben, daß seine Achse in die Hauptdiagonale des Rhomboeders fällt und die zwei Grundkreise je drei Rhomboederflächen berühren. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders durch ebene Konstr. gefunden werden.

50. Ein Rhomboeder zu konstr., das so in einen geg. Cylinder gelegt werden kann, daß seine Hauptecken in die Grundkreis-Ebenen, die übrigen Ecken auf die Mantelfläche zu liegen kommen. — Wie müssen sich Höhe und Halbmesser des Cylinders verhalten, damit das Rhomboeder zum Würfel werde?

51. Einer geg. Kugel ein Rhomboeder umzubeschreiben, von dem ein Rhombenwinkel geg. ist.

52. Einem geg. Oktaeder einen Würfel so einzubeschreiben, daß seine acht Ecken auf den von zwei gegenüberliegenden Ecken ausgehenden Kanten des Oktaeders liegen.

53. Einem geg. Oktaeder ein Tetraeder so einzubeschreiben, daß eine Mitteltransversale des Tetraeders in eine Oktaederdiagonale falle, und daß seine Ecken a) in vier Oktaederflächen, b) auf vier Oktaederkanten liegen. (III. Anh. 52. a, 49. a und vor. Aufg.)

54. a. Einem geg. Tetraeder einen Würfel so einzubeschreiben, daß in jeder Tetraederfläche eine Würfelecke liege. (Entw. direkt od. durch III. Anh. 53. a und 49. a.)

b. Einem geg. Dodekaeder ein Oktaeder so umzubeschreiben, daß die acht Oktaederflächen durch acht Ecken des Dodekaeders gehen. (III. Anh. 52. b oder 53. b.)

c. Einem geg. Würfel ein Ikosaeder so umzubeschreiben, daß acht Flächen des Ikosaeders durch die acht Würfelecken gehen.

55. a. Ein Körper, der aus einem Cylinder und aus zwei auf dessen Grundflächen aufgesetzten kongr. Kegeln besteht, kann so in ein oktaedr. Granatoeder einbeschrieben werden, α) daß der Cylinder 4, und jeder Kegel 4 Flächen berührt, β) daß der Cylinder 6, und jeder Kegel 3 Flächen berührt. Es soll beidemal der Achsenschnitt des Körpers gezeichnet werden.

b. Ein Körper, der aus einem Cylinder, aus zwei auf dessen Grundflächen aufgesetzten kongr. Kegelrümpfen, und aus zwei auf die andern Grundflächen der Kegelrümpfe aufgesetzten kongr. Kegeln besteht, kann so in ein ikosaedr. Granatoeder einbeschrieben werden, daß der Cylinder 10, jeder Kegelrumpf und jeder Kegel 5 Flächen berührt. Es soll der Achsenschnitt des Körpers gezeichnet werden. (Ein Großkreis der dem Granatoeder einbeschriebenen Kugel muß die Seiten des Achsenschnittes berühren. Sämtliche Berührungsmantellinien fallen in Rhombendiagonalen.)

56. Aus einem geg. Pyramidentetraeder ein Leuzitoeder auszuschneiden, so daß in jeder Fläche des Pyramidentetraeders eine Fläche des Leuzitoeders liege. (Die Mittelpunkte der Tetraederkanten bilden die Oktaederecken des Leuzitoeders.)

57. Einem geg. Wulst ein regul. 10-seitiges Prismatoid berührend umzubeschreiben, dessen Höhe gleich dem Durchmesser des Meridiankreises sei. Grundfläche und Seitenfläche sollen durch ebene Konstruktion gefunden werden, wenn die Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises geg. sind.

58. Ein Kegel hat mit einem Cylinder den Grundkreis gemein, und seine Spitze liegt im Mittelpunkt des andern Grundkreises des Cylinders. In den Raum zwischen Kegelmantel, Cylindermantel und Cylindergrundkreis sind a) sechs — b) fünf gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß jede ihre zwei Nachbarkugeln berührt. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders konstr. werden, wenn der Halbmesser der Kugeln geg. ist.

59. a. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, der gleiche Höhe und gleiche Mantelfläche mit einem geg. Cylinder habe.

b. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf umzubeschreiben, dessen Mantel gleich einem geg. Kreis sei.

60. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, wenn die Verhältnisse der Mantelfläche zu den zwei Grundkreisen geg. sind.

III. Berechnungs-Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der Anwendung der Körperberechnung auf praktische Beispiele kommt auch das G e w i c h t in Betracht. Zu seiner Bestimmung ist die Kenntnis des s p e z i f i s c h e n G e w i c h t e s des Stoffes, woraus der betreffende Körper besteht, erforderlich.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Stoffes versteht man diejenige Zahl, die angiebt, wie vielmal ein aus dem Stoff bestehender

Körper von beliebigem Volumen schwerer ist als ein gleich großes Volumen Wasser. Man erhält also das spez. Gewicht, wenn man das Gewicht des Körpers dividiert durch das Gewicht des gleichen Volumens Wasser. Tab. 1 (S. 224) giebt ein Verzeichnis der spezifischen Gewichte der am häufigsten vorkommenden Stoffe.

Ist V das Volumen eines Körpers, S sein spezifisches Gewicht, W das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so bestimmt sich hieraus das Gewicht P des Körpers auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit p das Gewicht der Kubikeinheit des Stoffes, so ist nach obiger Erklärung: $S = \frac{p}{W}$, also $p = SW$. Dies ist das Gewicht der Volumeinheit, folglich ist das Gewicht des Volumens V: $P = V \cdot p$, oder:

$$P = VSW.$$

Man erhält also das Gewicht durch Multiplikation des Volumens mit dem spezifischen Gewicht und dem Gewicht der Kubikeinheit Wasser.

Im metrischen Maßsystem besteht zwischen Gewichtsmaß und Längenmaß die Beziehung, daß das Gramm das Gewicht eines Kubik-Centimeters —, also das Kilogramm das Gewicht eines Kubik-Dezimeters (oder Liters) Wasser ist. Wird daher als Längeneinheit das Centimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Gramm, oder als Längeneinheit das Dezimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Kilogramm gewählt, so ist beidemal: $W = 1$. Das spezifische Gewicht ist also dann gleich dem Gewicht der Kubikeinheit des betr. Stoffes, und das Gewicht des Volumens V ist:

$$P = VS.$$

Tab. 2 (S. 225) giebt die Maße und Gewichte der Länder, in denen das metrische Maßsystem noch nicht eingeführt ist, verglichen mit dem letzteren.

1—8: Würfel.

1. Ein Würfel hält K (423,03) englische Kubikfuß. a) Wie viel hält er in Kubikmetern? b) Wie groß ist seine Oberfläche in Quadratmetern? — Antw.: a) 11,978 cbm, b) 31,411 qm.

2. Wie groß ist das Gewicht W der Kubikeinheit Wasser in den verschiedenen Maßsystemen? (Vgl. Tab. 2, S. 225.) — Antw.:

Im metr. Maßsystem (1 cbm) . . W. = 1000 kg.

In England ⎫
„ Nordamerika ⎭ (1 Kub.-Fuß) . . W = 62,424 Pfund.
„ Rußland „ . . W = 69,144 „

3. Die Diagonale eines Würfels ist d (= 4,58 dm); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 18,489 cdm.

4. Der Diagonalschnitt eines Würfels ist S (= 17,235 qcm); wie groß ist seine Oberfläche? — Antw.: 73,122 qcm.

5. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie m zu n (9 zu 20); wie verhalten sich ihre Inhalte? — Antw.: Wie 0,30187 zu 1.

6. Ein Würfel von Sandstein wiegt P (180) kg; wie groß ist seine Kante? — Antw.: 4,16 dm.

7. Ein messingner Würfel vom Gewicht P (= 1,5 kg) soll vergoldet werden; wieviel kostet die Vergoldung, wenn die Vergoldung des Quadratmeters m (60) Mark kostet? — Antw.: 1,14 Mark.

8. Die Kante eines gußeisernen Würfels ist a (= 20,8 cm); wie lang ist die Kante eines gleich schweren Würfels von Tannenholz? — Antw.: 50,7 cm.

9—13: Quader.

9. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie die Zahlen l, m, n (7, 9, 13), seine Diagonale ist d (= 25,7 m); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 2688,9 cbm.

10. Zwei Balken von quadratischem Querschnitt haben gleiches Volumen; ihre Längen verhalten sich wie m zu n (8 zu 11); wie verhalten sich die Seiten der Querschnittsquadrate? — Antw.: Wie 1,1726 zu 1.

11. Wieviel qm Blech braucht man zu einer Wanne ohne Deckel, die K (1440) Liter halten soll, wenn der Boden l (1,2) m lang und b (0,8) m breit werden soll? — Antw.: 6,96.

12. Wie schwer ist eine Kiste von Tannenholz samt Deckel, deren Kanten im lichten die Längen l, m, n (= 60, 80, 100 cm), und deren Wände die Dicke d (= 2,5 cm) haben? Wieviel Kilogramm dürfen in sie gelegt werden, wenn sie im Wasser bis zur Mitte der mit l parallelen äußeren Kante einsinken soll?*)

*) Bei Aufgaben über schwimmende Körper kommt der Satz („A r-

— Antw.: Gew. der Kiste = 50,06 kg; Belastung = 240 kg.

13. Wieviel kosten die Backsteine zu einem quadratischen Turm, der eine Breite b (= 4,2 m), eine Höhe h (= 10,8 m), und eine Mauerdicke d (= 0,6 m) hat, wenn ein Backstein die Dimensionen l, m, n (= 24, 12, 6 cm) hat, wenn das Hundert Backsteine k (3) Mark kostet, und wenn wegen des Abfalls p (8) Prozent mehr genommen werden müssen? — Antw.: 1749,60 Mark.

14—18: Prisma.

14. Wie groß ist der Inhalt eines regulären dreiseitigen Prismas, in dem jede Kante die Länge a (= 6,2 cm) hat? — Antw.: 103,2 ccm.

15. Ein reguläres fünfseitiges Prisma, dessen Höhe das Dreifache einer Grundkante ist, hat den Inhalt K (= 248 cdm). Wie lang ist seine Grundkante? — Antw.: 3,635 dm.

16. Wie groß ist der Inhalt K eines spitzen bezw. stumpfen Rhomboeders, wenn die von den Hauptecken ausgehenden Rhombendiagonalen die Länge d (= 3 cm, bezw. 2 cm), die übrigen Rhombendiagonalen die Länge d' (= 2 cm, bezw. 3 cm) haben? (III. Anh. 11. a). — Antw.: $K = \frac{1}{4} d'^2 \sqrt{3 d^2 - d'^2} = 4{,}796$ ccm, bezw. 3,897 ccm.

17. Wie groß ist das Gewicht eines Dachsparrens von Tannenholz, der als Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge a (= 16 cm) hat und an beiden Enden durch rechteckige Flächen so abgeschrägt ist, daß zwei parallele Seitenflächen des Sparrens gleichschenklige Trapeze sind, in denen der spitze Winkel $\frac{1}{2}$ R beträgt und die größere Parallelseite die Länge l (= 5 m) hat? — Antw.: 61,95 kg.

18. Eine gußeiserne hohle Säule von der Form eines regul. sechsseitigen Prismas hat die Höhe h (= 10 Fuß), die äußere Grundkante a (= 6 Zoll) und die Dicke d (= 10 Lin.). Wie groß ist ihr Gewicht? — Antw.: In Nordamerika 867 Pfund.

---

chimedisches Prinzip") zur Anwendung, daß das Gewicht des schwimmenden Körpers gleich ist dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse.

19—28: Cylinder.

19. Der Inhalt eines Cylinders ist K (= 33 cdm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 2,6 dm); wie groß ist seine Höhe und sein Mantel? — Antw.: Höhe = 1,554 dm, Mantel = 25,385 qdm.

20. Die Wandfläche eines cylindrischen Innenraumes ist M (= 160 qm), seine Höhe ist gleich dem Durchmesser der Grundfläche; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 285,46 cbm.

21. In eine cylindrische Glasröhre werden P (1,5) Gramm Quecksilber gebracht und nehmen darin einen Raum von der Länge l (= 168 mm) ein. Wie groß ist der innere Durchmesser der Röhre? — Antw.: 0,91 mm.

22. Der Mantel eines cylindrischen Blechgefässes ist M (= 27 qdm), sein Inhalt K (= 30 l); wie groß ist seine Höhe und sein Halbmesser? — Antw.: Höhe = 1,934 dm, Halbm. = 2,222 dm.

23. Aus einem Blechstreifen gehämmerten Silbers werden runde Stücke zu Münzen geschlagen; der Streifen hat die Länge l (= 60 cm), die Breite b (= 4,5 cm), die Dicke d (= 0,25 cm), der Durchmesser einer Münze ist 2 r (= 4,25 cm). Wieviel wiegt der Abfall des Streifens, wenn die Löcher von den Längenkanten und von einander gleich weit entfernt sind? — Antw.: 227,21 g.

24. Ein Gewichtsystem von Messing besteht aus lauter Cylindern, in denen die Höhe das anderthalbfache des Durchmessers der Grundfläche ist; wie groß sind die Höhen der einzelnen Gewichtstücke, wenn diese 1, 2, 3 u. s. w. Kilogramm halten sollen? — Antw.: 1) 6,99 cm, 2) $6{,}99 \sqrt[3]{2} = 8{,}80$ cm, 3) $6{,}99 \sqrt[3]{3} = 10{,}08$ cm, u. s. f.

25. Wie schwer ist ein cylindrischer Mühlstein aus Sandstein, von dem die Höhe h (= 63 cm), der äußere Durchmesser 2 R (= 176 cm), und der Lochdurchmesser 2 r (= 20 cm) geg. ist? — Antw.: 3782 kg.

26. Zu dem Guß von 10 gleichen eisernen Röhren von der Länge l (= 12 Fuß) und dem lichten Durchmesser 2 r (= 6 Zoll) werden P (5700) Pfund Eisen verwendet; es bleibt ein Rückstand

von P′ (154) Pfund übrig. Wie dick werden die Röhren? — Antw.: In England: 8,4 Lin.

27. Ein Silberdraht von l (2) Meter Länge und P (10,8) Gramm Gewicht soll mit P′ (3) Gramm Gold vergoldet werden. a) Wie dick ist der Silberdraht? b) Wie dick wird die Vergoldung? — Antw.: a) 0,8 mm, b) 0,03 mm.

28. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 2 cm) wird durch eine zu seiner Achse schiefe Ebene so geschnitten, daß das eine Teilstück den Inhalt K (= 160 ccm) und die Gesamtoberfläche (Mantel + Grundkreis + Schnittellipse) O (= 200 qcm) hat. Wie groß sind die zwei parallelen Seiten des Trapezes, das den zur Schnittebene senkrechten Achsenschnitt des Teilstückes bildet? (Vgl. III. Anh. 9. c und II. Anh. 22. c.) — Antw.: 16,614 cm und 8,851 cm.

29—34: Pyramide.

29. Eine Pyramide hat den Inhalt K (= 365 cbm) und die Grundfläche G (= 22,5 qm). Wie groß ist ihre Höhe? — Antw.: 48,67 m.

30. Eine reguläre achteckige Pyramide hat die Grundkante a (= 7 cm), ihre Höhe ist gleich dem Durchmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises; wie groß ist ihr Inhalt? — Antw.: 1442,6 ccm.

31. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist die Hälfte der Grundfläche; wie verhält sich seine Entfernung von der Spitze zur Höhe der Pyramide? — Antw.: Wie 1 zu $\sqrt{2}$.

32. Eine reguläre vierseitige Pyramide, deren Seitenkanten gleich den Grundkanten sind, hat den Inhalt K (= 126,59 cbm); wie lang sind die Kanten? — Antw.: 8,128 m.

33. Wie groß ist der Inhalt eines Sphenoids (vgl. III. Anh. 26. a), dessen drei Kanten die Längen a, b, c (= 4, 5, 6 cm) haben? (III. Anh. 19. d). — Antw.:

$$K = \frac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} = 9{,}1855 \text{ ccm}.$$

34. Aus K (1) cdm Thon wird das gleicheckig-halbregul. Polyeder modelliert, dessen Ecken die Mitten der Oktaederkanten bilden (vgl. III. Anh. 54. b). Wie groß wird die Kantenlänge des Polyeders? — Antw.: 7,5 cm.

35—41: Kegel.

35. Ein kegelförmiges Turmdach hat das Volumen V (= 11,9 cbm) und die Höhe h (= 6,7 m); wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? — Antw.: 1,3 m.

36. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge s (= 15 cm); wie groß ist der Mantel und der Inhalt des Kegels? — Antw.: M = 353,43 qcm, K = 765,20 ccm.

37. Das Zelttuch eines kegelförmigen Zeltdaches mißt M (100) qm; sein Achsenschnitt ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 111,82 cbm.

38. Ein bleierner Kegel hat den Grundkreis-Halbmesser r (= 3 cm); wie groß ist der Halbmesser eines gleich hohen und gleich schweren Kegels von Gußeisen? — Antw.: 3,76 cm.

39. In einen Kegel ist ein Cylinder einbeschrieben, dessen Höhe gleich der halben Höhe des Kegels ist; wie verhalten sich die Inhalte beider Körper? — Antw.: Wie 8 zu 3.

40. Die Oberfläche eines Kegels ist O (= 5 qm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 1 dm); wieviel Grade mißt der Kreisausschnitt, der die Abwicklung des Mantels vorstellt? — Antw.: $2^\circ\ 16'\ 34''$.

41. Ein kreisförmiges Stück Filtrierpapier wird nach zwei zu einander senkrechten Durchmessern gebrochen, zu einem Quadranten zusammengefaltet und derart zu einem kegelförmigen Filter geöffnet, daß die eine Hälfte des Mantels aus einer, die andere Hälfte aus drei Lagen Papier besteht. a) Wie groß muß die Öffnung eines kegelförmigen Glastrichters sein, damit sich das Papierfilter an seine Innenwand längs deren ganzen Ausdehnung glatt anlegen kann? b) Wie groß muß der Durchmesser des ursprünglichen Papierblattes mindestens sein, damit das Filter 1 Liter Flüssigkeit fassen kann? — Antw.: a) 60°, b) 32,8 cm.

42—50: Pyramiden- und Kegelrumpf.

42. Ein Pyramidenrumpf hat den Inhalt K (= 230 cbm), seine Grundflächen sind Quadrate von den Seitenlängen a und a'

(= 6,94 und 3,55 m); wie groß ist seine Höhe, und wie groß die Höhe seiner Ergänzungspyramide? — Antw.: 8,08 m, und 8,46 m.

43. Ein Monument aus Sandstein hat die Form eines regulären dreiseitigen Pyramidenrumpfes; die untere Grundkante ist a (= 90 cm), die obere a′ (= 50 cm), die Seitenkante k (= 180 cm). Wie groß ist das Gewicht des Monumentes? — Antw.: 972,7 kg.

44. In einem Pyramidenrumpf mit den Grundflächen G und G′ (= 27 und 16 qdm) halbiert ein Parallelschnitt die Höhe; wie groß ist dieser Parallelschnitt? — Antw.: 21,142 qdm.

45. Wie viele Fuhren Erde, jede zu F (1,5) cbm, müssen fortgeschafft werden, wenn in den Boden eine kreisförmige Grube gegraben wird, die eine Tiefe h (= 2 m), einen oberen Durchmesser 2 R (= 40 m), und einen Böschungswinkel von 45° erhalten soll? — Antw.: 1513,6.

46. Ein papierner Lampenschirm soll die Höhe h (= 9 cm) und die Grundkreis-Durchmesser 2 R u. 2 r (= 15 u. 7,5 cm) bekommen. Wie groß werden die zwei Halbmesser der Abwicklungsfigur, und wieviel Grade messen ihre Bögen? — Antw.: Halbm. = 19,5 und 9,75 cm, Bogen = 138° 27′ 41″.

47. Eine irdene Schüssel soll ein Liter Flüssigkeit halten, der innere Bodendurchmesser soll 2 r (= 7 cm), die lichte Höhe — h (= 4 cm) sein. Wie groß muß der lichte Randdurchmesser werden? — Antw.: 26,8 cm.

48. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 50 cm) wird konisch ausgebohrt, so daß die mit den Grundkreisen des Cylinders konzentrischen, kreisförmigen Öffnungen sich verhalten wie m zu n (1 zu 2), und daß das Gewicht des durchbohrten Körpers die Hälfte von dem Gewichte des Vollcylinders ist; wie groß werden die Durchmesser der Öffnungen? — Antw.: 58,29 cm und 82,44 cm.

49. Ein runder Turm von der Höhe h (= 18 m) hat oben den Durchmesser 2 r (= 4,2 m), unten den Durchmesser 2 R (= 5,7 m). Wieviel kostet das Übertünchen des Turmes, wenn pro Quadratmeter m (4) Mark gerechnet werden? — Antw.: 1120,63 Mark.

50. Ein Cylinder und ein Kegelrumpf haben gleiche Höhe

h (= 5 cm) und konzentrische Grundflächen, ihre Mäntel durchschneiden sich in der Mitte der Höhe, die Grundkreishalbmesser des Kegelrumpfes sind R und r (= 15 cm und 9 cm). a) Wie verhalten sich die Inhalte, b) wie die Mäntel beider Körper? c) in welcher Höhe müßten sich die Mäntel schneiden, wenn die Inhalte — d) in welcher Höhe, wenn die Mäntel gleich sein sollten? — Antw.: a) Wie 48 zu 49, b) wie 0,64 zu 1, c) 2,40 cm, d) — 3,12 cm.

51—56: Prismatoid.

51. Von einem regulären dreiseitigen Prisma, dessen Grundkanten und Seitenkanten die Längen g und s (= 3,7 und 20 dm) haben, werden an beiden Enden Stücke weggeschnitten. Die eine Schnittebene schneidet von den drei Seitenkanten unten die Strecken l, m, n (= 1, 2, 3 dm) ab, die andere Schnittebene geht durch den oberen Endpunkt der ersten Seitenkante und schneidet von den zwei anderen die Strecken m' und n' (= 3 und 5 dm) ab. Wie groß ist der Inhalt des schiefabgeschnittenen Prismas? — Antw.: 90,895 cdm.

52. Ein reguläres 12-seitiges Prismatoid hat die Grundkante a und die Höhe h. α) Wie groß ist sein Inhalt? β) Wie groß ist der Inhalt des 12-seitigen Trapezoeders, das durch Erweitern der Seitenflächen des Prismatoides entsteht (vgl. III. Anh. 61. b)? γ) Wie verhält sich das Trapezoeder zu der Doppelpyramide, deren Halbflächner es vorstellt? — Antw.: α) $a^2h(1+\sqrt{3})$. β) $a^2h(7+4\sqrt{3})$. γ) Wie $4(2-\sqrt{3}):1$.

53. Wie groß ist der Inhalt eines Walmdaches, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten l und b (= 50 und 20 m) ist, dessen Firstkante gleich der Differenz von l und b ist, und dessen Dreiecksflächen gleichseitig sind? — Antw.: 6128,3 cbm.

54. Ein Grabstein aus Granit kann in einen Obelisken mit rechteckigen Grundflächen und trapezförmigen Seitenflächen — und in ein Walmdach zerlegt werden. Das untere Grundrechteck des Obelisken hat die Seiten a und b (= 125 und 75 cm), das obere hat die Seiten a' und b' (= 75 und 50 cm), die Höhe ist h (= 200 cm). Das Walmdach hat das obere Rechteck zur Grundfläche; seine Trapezflächen stoßen an die kürzeren Rechtecksseiten, seine

Dreiecksflächen liegen in denselben Ebenen mit den breiteren Trapezflächen des Obelisken und bilden mit diesen zusammen zwei symmetrische Fünfecke; die Höhe des Walmdaches ist h' (= 25 cm). Wie groß ist das Gewicht des Grabsteines? — Antw.: 3884,4 kg.

55. Das Ufer eines Wasserbeckens hat die Gestalt eines rechtwinkligen Trapezes; die zwei parallelen Uferkanten sind a und b (= 20 und 14 m), die zu ihnen senkrechte Uferkante ist c (= 8 m); die Tiefe des Beckens ist h (= 2 m); die Böschungen haben eine Neigung von 45°. Wieviel Wasser enthält das Becken, wenn der Wasserstand um $\frac{1}{n}$ h (n = 4) niedriger ist als das Ufer? — Antw.: 1183 hl.

56. Ein Faß hat eine (innere) Höhe h (= 100 cm), einen Bodendurchmesser d (= 70 cm), einen Spunddurchmesser D (= 85 cm). Wieviel Liter hält es? (III. Anh. 44. d.) — Antw.: 506,6 Liter.

57—63: Reguläre Polyeder.

57. Bei jedem der fünf regul. Polyeder bezeichne: a die Kantenlänge, R den Halbmesser der umbeschr. Kugel, r — der einbeschr. Kugel, ρ — der kantenberührenden Kugel, O die Oberfläche, K den Inhalt. Wie groß sind R, r, ρ, O, K, ausgedrückt in a? — Antw.: in der nachstehenden Tabelle:

	Tetraeder.	Hexaeder.	Oktaeder.	Dodekaeder.	Ikosaeder.
R =	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
r =	$\frac{a}{2\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{a}{4}\,\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
ρ =	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)$	$\frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$
O =	$a^2\sqrt{3}$	$6\,a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3\,a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$5\,a^2\sqrt{3}$
K =	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	a^3	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$	$\frac{5\,a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$

(Bei Dodek. und Ikos. berechne man zuerst 2ρ als Diagonale einer Grundfläche der in III. Einl. 15. b und c erwähnten Prismatoide, hierauf $2R$ als Diagon. eines Rechtecks aus a und 2ρ. Zerlegt man sodann das Polyeder vom Mittelpunkt aus in Pyramiden, so sind diese regul. und kongr., eine Seitenkante $= R$, die Höhe $= r$, die Summe aller Pyr. $= K$.) — Durch Elimination von a aus je zweien der obigen Formeln, die dem nämlichen Polyeder angehören, kann von den Größen R, r, ρ, O, K jede in jeder andern ausgedrückt werden.

58. Wie verhält sich der Würfel a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder, b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (dessen Flächen durch die Würfelecken gehen), c) zu dem Oktaeder, dessen Kanten die Würfelkanten in deren Mitten schneiden (vgl. III. Anh. 54. Schlußbem.)? — Antw.: a) Wie 6 zu 1, b) wie 2 zu 9, c) wie 3 zu 4.

59. Wie verhält sich das Tetraeder a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 54. a), b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 52. a und 49. a)? — Antw.: a) Wie 2 zu 1, b) wie 2 zu 27.

60. Ein hohles Ikosaeder von Zinkblech, dessen Wände die Dicke d (= 0,5 mm) haben, wiegt P (198,1) g. Wie groß ist seine äußere Kante? — Antw.: 8 cm.

61. Wie groß sind die zwei regul. Pyramidenrümpfe und das Prismatoid, in die ein Dodekaeder von der Kantenlänge a zerlegt werden kann? — Antw.: Die drei Teile haben gleiche Größe: $K = \frac{a^3}{12}(15 + 7\sqrt{5})$.

62. Wie groß ist der Inhalt des oktaedrischen und des ikosaedrischen Granatoeders, ausgedrückt α) in der Granatoederkante g, β) im Halbmesser der einbeschr. Kugel r, γ) in den Kanten o und w, bezw. i und d des zugehörigen Oktaeders und Würfels, bezw. Ikosaeders und Dodekaeders? (III. Anh. 55. b und c). — Antw.:

$$K_o = \frac{16}{9} g^3\sqrt{3} = 4r^3\sqrt{2} = \tfrac{1}{2} o^3\sqrt{2} = 2\,w^3.$$

$$K_i = 4\, g^3\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 20\,r^3(\sqrt{5}-2) = \tfrac{5}{2} i^3 = \tfrac{5}{2} d^3(\sqrt{5} + 2).$$

63. Ein Tetraeder von Holz schwimmt im Wasser so, daß die außerhalb des Wassers befindliche Kante horizontal ist. Die Länge der Kante ist a (= 6 cm), die Entfernung der horizontalen

Kante vom Wasserspiegel e (= 1,5 cm). Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes? — Antw.: 0,713.

64—82: Kugel und Kugelteile.

64. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel vom Inhalt K (= 324 ccm)? — Antw.: 4,26 cm.

65. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie m zu n (3 zu 10); wie verhalten sich ihre Oberflächen? — Antw.: Wie 0,44814 zu 1.

66. Aus drei Kugeln von den Halbmessern r_1, r_2, r_3 (= 7, 9, 15 cm) wird eine einzige gegossen; wie groß wird ihr Halbmesser? — Antw.: 16,4 cm.

67. Eine halbkugelförmige Schale von Gußeisen hat den äußeren Durchmesser 2 R (= 20 cm) und die Dicke d (= 1,5 cm). a) Wie groß ist ihr Gewicht? b) Wie groß dürfte die Dicke höchstens sein, damit die Schale in Wasser schwimmen könnte? — Antw.: a) 5,860 kg; b) 0,48 cm.

68. Aus einem kugelförmigen Tropfen Seifenwasser vom Durchmesser d (= 4 mm) wird eine Seifenblase vom Durchmesser D (= 6 cm) geblasen. Wie dick ist die Blase? — Antw.: 0,003 mm.

69. Wie viele Kugeln lassen sich aus P (82) russ. Pfund Blei gießen, wenn der Durchmesser einer jeden 2 r (4) russ. Lin. mißt? — Antw.: 9269.

70. Ein Gefäß, dessen Innenraum die Form eines regulären sechsseitigen Prismas von der Grundkante a (= 5 cm) hat, enthält Wasser. Darin wird eine Kugel untergetaucht, welche die Wände berührt. Um wieviel steigt dadurch der Wasserspiegel? — Antw.: Um 5,24 cm.

71. a) Um wieviel Kilogramm ist ein mit Wasserstoff gefüllter kugelförmiger Luftballon leichter als die Luft, die er verdrängt, wenn der Durchmesser des Ballons 2 r (25) Meter mißt, und wenn das Quadratmeter der Hülle P (0,03) Kilogramm wiegt? b) Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft in derjenigen Höhe, wo der Ballon dasselbe Gewicht hat wie die verdrängte Luftkugel? — Antw.: a) 9842,8; b) 0,000097.

72. Wie verhält sich der Inhalt einer Kugel zu dem In-

halt des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Tetraeders, Würfels, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders?

Antw.: Ist K der Inhalt der Kugel, T_i der des einbeschr. —, T_u der des umbeschr. Tetraeders u. s. w., so ist:

$$\frac{K}{T_i} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0{,}12252}. \qquad \frac{K}{T_u} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3{,}30797}.$$

$$\frac{K}{H_i} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0{,}36755}. \qquad \frac{K}{H_u} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{1{,}90986}.$$

$$\frac{K}{O_i} = \pi = \frac{1}{0{,}31831}. \qquad \frac{K}{O_u} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}65399}.$$

$$\frac{K}{D_i} = \frac{\pi\sqrt{3}(5-\sqrt{5})}{10} = \frac{1}{0{,}66491}. \qquad \frac{K}{D_u} = \frac{\pi\sqrt{65+29\sqrt{5}}}{15\sqrt{10}} = \frac{1}{1{,}32503}.$$

$$\frac{K}{J_i} = \pi\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{0{,}60546}. \qquad \frac{K}{J_u} = \frac{\pi(3+\sqrt{5})^2}{60\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}20657}.$$

73. Eine Kugel vom Durchmesser 2 R (= 15 cm) wird durch zwei parallele Kugelkreise in eine Zone und zwei Kugelabschnitte geteilt. Wie groß sind die Inhalte dieser drei Teile, wenn ihre Höhen sich verhalten wie l : m : n (3 : 4 : 5)? — Antw.: 276,12 ccm, 826,30 ccm und 664,73 ccm.

74. Eine hölzerne Kegelkugel schwimmt im Wasser, so daß die benetzte Kugelhaube größer als die Halbkugel ist. Durch Anwendung von II. Aufg. 10. a und b wird der ebene Halbmesser des nassen Randkreises r (= 5,2 cm) und der Kugelhalbmesser R (= 6 cm) gefunden. Wie groß ist das spez. Gewicht der Kugel? — Antw.: 0,843.

75. In welchem Verhältnis wird die Achse eines Kugelausschnittes durch den zugehörigen Kugelkreis geteilt, a) wenn der Kugelkreis den Inhalt — b) wenn er die Oberfläche halbiert? — Antw.: a) Im Verh. des goldenen Schnittes $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}):1 = 1{,}618:1$; b) Im Verh. 3 : 2.

76. Auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser R (= 10 cm) befindet sich ein sphär. Dreieck mit den Winkeln α, β, γ (= 93° 40′, 67° 32′ 16″, 105° 36′ 44″). Wie groß ist der Inhalt des Körpers, der von dem zugehör. Dreikant aus der Kugel ausgeschnitten wird? — Antw.: 505,08 ccm.

77. a) Wie groß ist der Flächenraum, der von einer Höhe

h (= 1 geogr. Meile) über der Erdoberfläche überschaut werden kann? b) Wie hoch muß man sich über die Erdoberfläche erheben, um eine Fläche von 1000 Quadratmeilen überschauen zu können? (Erddurchmesser = 1719 geogr. Meilen.) — Antw.: a) 5394 Quadratmeilen; b) 0,1852 Meilen = 1,374 km.

78. Die krumme Oberfläche einer Kugelzone, deren Grundkreise gleich sind, soll mit einem einzigen Papierstreifen ohne Falten überklebt werden, so daß längs den Grundkreisen keine —, längs dem zugehörigen Aequator die größte Dehnung des Papiers stattfindet. Wie groß darf die Höhe der Zone höchstens sein, wenn die Längenausdehnungsfähigkeit des feuchten Papiers $\frac{1}{n}\left(=\frac{1}{24}\right)$ ist? — Antw.: $\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} = 0{,}28$ des Kugeldurchm.

79. Eine Kugel vom Halbmesser R (= 20 cm) wird cylindrisch ausgebohrt, so daß die Cylinderachse durch den Mittelpunkt geht und der Halbmesser des Loches r (= 8 cm) ist. Wie groß ist der Inhalt des ausgehöhlten Körpers? (III. Anh. 41. a.) — Antw.: 25799 ccm.

80. Die Grundflächen eines Kegelrumpfes haben die Halbmesser r und r' (= 4 und 3 cm), seine Höhe ist h (= 2 cm); a) wie groß ist der Halbmesser der dem Kegelrumpf umbeschriebenen Kugel? b) wie verhält sich der Inhalt des Kegelrumpfes zum Inhalt der umbeschriebenen Kugelzone? c) wie verhält sich der Mantel des Kegelrumpfes zur krummen Oberfläche der Zone? — Antw.: a) 4,0697 cm; b) wie 74 zu 79; c) wie 0,96155 zu 1.

81. In eine Kugel vom Halbmesser R (= 6 cm), sind vier gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß alle einander berühren; wie groß ist ihr Halbmesser? — Antw.: 2,697 cm.

82. Wie schwer ist eine gläserne Bikonvexlinse, deren Oberfläche aus zwei Kugelhauben mit gemeinsamem Grundkreis besteht, wenn die zugehör. Kugeln die Halbm. R u. R' (= 50 u. 30 cm) haben, und wenn die Linse die (längs der Achse gemessene) Dicke a (= 0,5 cm) hat? — Antw.: 44,06 g.

83—90: Umdrehungskörper.

83. Eine Kette von Schmiedeisen besteht aus n (100) gleichen wulstförmigen Ringen. Wird sie geradlinig ausgespannt,

so daß sich die Ringe paarweise berühren, und daß ihre Berührungspunkte und Mittelpunkte alle in gerader Linie liegen, so befindet sich zwischen jedem ersten und dritten Ring ein Spielraum gleich der Dicke eines Ringes, und beträgt die Gesamtlänge der Kette (zwischen den zwei äußersten Punkten gemessen) 1 (3,02) Meter. Wie groß ist das Gewicht der Kette? — Antwort: 7,686 kg.

84. Ein Dreieck ABC wird um eine zu AB parallele Gerade MN gedreht. In welchen Abständen von AB muß MN angenommen werden, wenn der Inhalt des erzeugten Umdrehungskörpers 2, 3, ... n-mal so groß sein soll als der Inhalt des durch Drehung des Dreiecks um AB erzeugten Umdrehungskörpers? — Antw.: In den Abständen: $\frac{1}{3}h$, $\frac{2}{3}h$, ... $\frac{n-1}{3}h$, wenn h die zu AB gehörige Höhe des Dreiecks ist.

85. Die Ecken eines Dreiecks ABC haben von einer in seiner Ebene liegenden Geraden MN die Entfernungen a, b, c (= 13, 9, 2). Von der Ecke A soll eine Transversale AT so gezogen werden, daß, wenn das Dreieck um MN als Achse gedreht wird, die von den beiden Teildreiecken ATB und ATC beschriebenen Umdrehungskörper einander gleich sind. In welchem Verhältnis ist BC im Punkt T zu teilen? (Vgl. Bew. von III. 20. a.) — Antw.: Im Verh. $\frac{\sqrt{(a+b+c)^2+(b-c)^2}-(b-c)}{a+b+c} = \frac{3}{4}$.

86. Der Bogen eines Kreisabschnittes mißt 120°, sein Halbmesser ist R (= 6 cm). Wie groß ist a) die Entfernung des Flächenschwerpunktes des Kreisabschnittes von seiner Sehne, b) der Inhalt des durch Drehung des Kreisabschnittes um seine Sehne erzeugten Umdrehungskörpers? (Mittels III. Anh. 41. a.) — Antw.: a) 1,23 cm. b) 170,895 ccm.

87. In einem Wulst vom Mittelkreishalbmesser R (= 4 cm) und Meridianhalbmesser r (= 2 cm) wird durch die zwei Parallelkreise, die gleich dem Mittelkreis sind, eine Kugelfläche gelegt. Wie groß sind die zwei ringförmigen Teile, in die der Wulst durch sie geteilt wird? — Antw.: Jeder ist gleich der Hälfte des Wulstes = $R r^2 \pi^2$ = 157,914 ccm.

88. Auf einer Geraden sind folgende Strecken abgetragen: ab = 6, bc = 5, cd = 1, de = $1\frac{1}{2}$, ef = $10\frac{1}{2}$; in den

Punkten a, b, c . . . sind auf der Geraden nach der nämlichen Seite hin die Senkrechten errichtet: $aA = bB = 16\frac{1}{2}$, $bB' = cC' = 14$, $cC = dD = eE' = 13\frac{1}{2}$, $eE = fF = 12$; endlich ist AB gezogen, über B'C' nach außen ein Halbkreis errichtet, CD gezogen, E mit D durch einen Viertelskreis verbunden, dessen Mittelpunkt E' ist, und EF gezogen. Die hiedurch entstandene Figur bildet den halben Achsenschnitt eines Toskanischen Säulenfußes, dessen unterster Teil eine quadratische Platte (mit aA als halber Grundkante und ab als Höhe) ist, und dessen übrige Teile durch Drehung der übrigen Figur um bf als Achse entstehen. Wie groß ist das Gewicht des in Sandstein ausgeführten Säulenfußes, wenn die obigen Maße als Dezimeter verstanden werden? — Antw.: 41451 kg.

89. Wie groß ist der Inhalt eines gestreckten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b (= 4 u. 3 cm) um die große Achse 2a entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c u. III. Anh. 40.) — Antw.: $\frac{4}{3}ab^2\pi = 150{,}8$ ccm.

90. Wie groß ist der Inhalt eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b um die kleine Achse 2 b entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c, III. Anh. 12. b, III. 20. Zus.) — Was ist der Rauminhalt des als abgeplattetes Rotationsellipsoid aufgefaßten Erdkörpers, wenn die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$, und ein Grad des Aequators gleich 15 geogr. Meilen ist? — Antw. $\frac{4}{3}a^2b\pi = 1\,082\,840$ Millionen Kubikkilometer.

IV. Tabellen.

Tab. 1. Spezifische Gewichte.

	Spez. Gew.	log.
Wasser	1	0,00 000
Blei	11,4	1,05 690
Eisen (Gußeisen)	7,251	0,86 040
„ (Schmiedeisen) . . .	7,788	0,89 143
Glas (gemeines)	2,6	0,41 497
„ (Kristallglas)	3,0	0,47 712
Gold (gegossen)	19,26	1,28 466
„ (gehämmert)	19,36	1,28 691
Granit	2,95	0,46 982
Holz (Kork)	0,24	0,38 021—1
„ (trockenes Tannenholz) .	0,5	0,69 897—1
„ (trockenes Eichenholz) . .	0,8	0,90 309—1
Kalkstein, Marmor	2,72	0,43 457
Kupfer (gegossen)	8,788	0,94 389
„ (gehämmert)	9,0	0,95 424
Luft (v. 0° Temp. b. 770 mm Barometerst.)	0,0013	0,11 394—3
Messing	8,4	0,92 428
Platin	21,314	1,32 866
Quecksilber	13,597	1,13 344
Sandstein	2,5	0,39 794
Silber (gegossen)	10,47	1,01 995
„ (gehämmert)	10,62	1,02 612
Wasserstoffgas	0,0000897	0,95 279—5
Zink	7,213	0,85 812
Zinn	7,291	0,86 279

Tab. 2. Verschiedene Maße und Gewichte,

verglichen mit Meter und Kilogramm.

	Meter		Kilogr.
1 englischer / 1 nordamer. / 1 russischer Fuß (à 12 Zoll à 12 Lin.)	= 0,3048	1 englisches / 1 nordamer. Pfd.	= 0,4536
		1 russisches „	= 0,4095

1 geograph. Meile (= $\frac{1}{15}$° des Aeq.) = 7420,44.

Tab. 3. Stereometrische Formeln.

Körper.	Bestimmungselemente.	Inhalt.	Mantel.	Oberfläche.
Quader.	Die drei von einer Ecke ausgehenden Kanten $= l, m, n$.	lmn.	—	$2(lm+mn+nl)$.
Prisma.	Grundfläche $= G$, Höhe $= h$.	Gh.	—	—
Cylinder.	Halbmesser $= r$, Höhe $= h$.	$r^2\pi h$.	$2r\pi h$.	$2r\pi(r+h)$.
Pyramide.	Grundfläche $= G$, Höhe $= h$.	$\frac{1}{3} G h$.	—	—
Kegel.	Halbmesser des Grundkreises $= r$, Höhe $= h$, Mantellinie $= s = \sqrt{r^2+h^2}$, Mittellot der Mantellinie (zwischen Mantellinie und Achse) $= p$.	$\frac{1}{3}r^2\pi h$.	$r\pi s$. $2p\pi h$.	$r\pi(r+s)$.
Pyramidenrumpf.	Grundflächen $= G$ und G', Höhe $= h$.	$\frac{h}{3}\left(G+\sqrt{GG'}+G'\right)$.	—	—
Kegelrumpf.	Halbmesser der Grundkreise $= r$ und r', Höhe $= h$, Mantellinie $= s = \sqrt{h^2+(r-r')^2}$, Mittellot der Mantellinie (zwischen Mantellinie und Achse) $= p$.	$\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rr'+r'^2\right)$.	$(r+r')\pi s$. $2p\pi h$.	—
Prismatoid.	Grundflächen $= G$ und G', Mittelschnitt $= M$, Höhe $= h$.	$\frac{h}{6}\left(G+G'+4M\right)$.	—	—
Kugel.	Halbmesser $= R$.	$\frac{4}{3}R^3\pi$.	—	$4R^2\pi$.
Kugelzone.	Halbmesser der Kugel $= R$, Halbmesser der Grundkreise $= r$ und r', Entfernungen der Grundkreise vom Mittelpunkt $= e$ und $e-h$, Höhe $= h$.	$\frac{\pi h}{3}\left(3R^2-3e^2+3eh-h^2\right)$. $\frac{\pi h}{6}\left(3r^2+3r'^2+h^2\right)$.	$2R\pi h$.	—
Kugelabschnitt (Kugelhaube).	Halbmesser der Kugel $= R$, Halbmesser des Grundkreises $= r$, Höhe $= h$.	$\frac{\pi h^2}{3}\left(3R-h\right)$. $\frac{\pi h}{6}\left(3r^2+h^2\right)$.	$2R\pi h$. $(r^2+h^2)\pi$.	—
Kugelausschnitt.	Halbmesser der Kugel $= R$, Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes $= h$.	$\frac{2}{3}R^2\pi h$.	—	—